Šolski center Velenje
Višja strokovna šola Velenje
Trg mladosti 3, 3320 Velenje

Računalniško vodeni procesi I

Osnove višješolske matematike

Interno gradivo - druga, popravljena izdaja

Robert Meolic

21. september 2007

Predgovor

Pred vami je skripta, ki podaja osnove višješolske matematike. Poznavanje tega področja se npr. zahteva pri predmetu **Računalniško vodeni procesi 1** v programu Informatika.

Snov obsega 13 osnovnih poglavij, ki jim sledi daljše 14. poglavje. V zadnjem poglavju na kratko pregledamo nekoliko težjo snov, ki je podrobno razložena v učbenikih za tehnične visoke strokovne šole. Skripta se zaključi s primeri nalog iz pisnega dela izpita in s spiskom vprašanj za ustni zagovor. Ugotovili boste, da računske naloge ne pokrivajo celotne snovi. Za približno četrtino snovi je namreč dovolj, da znate razložiti teorijo.

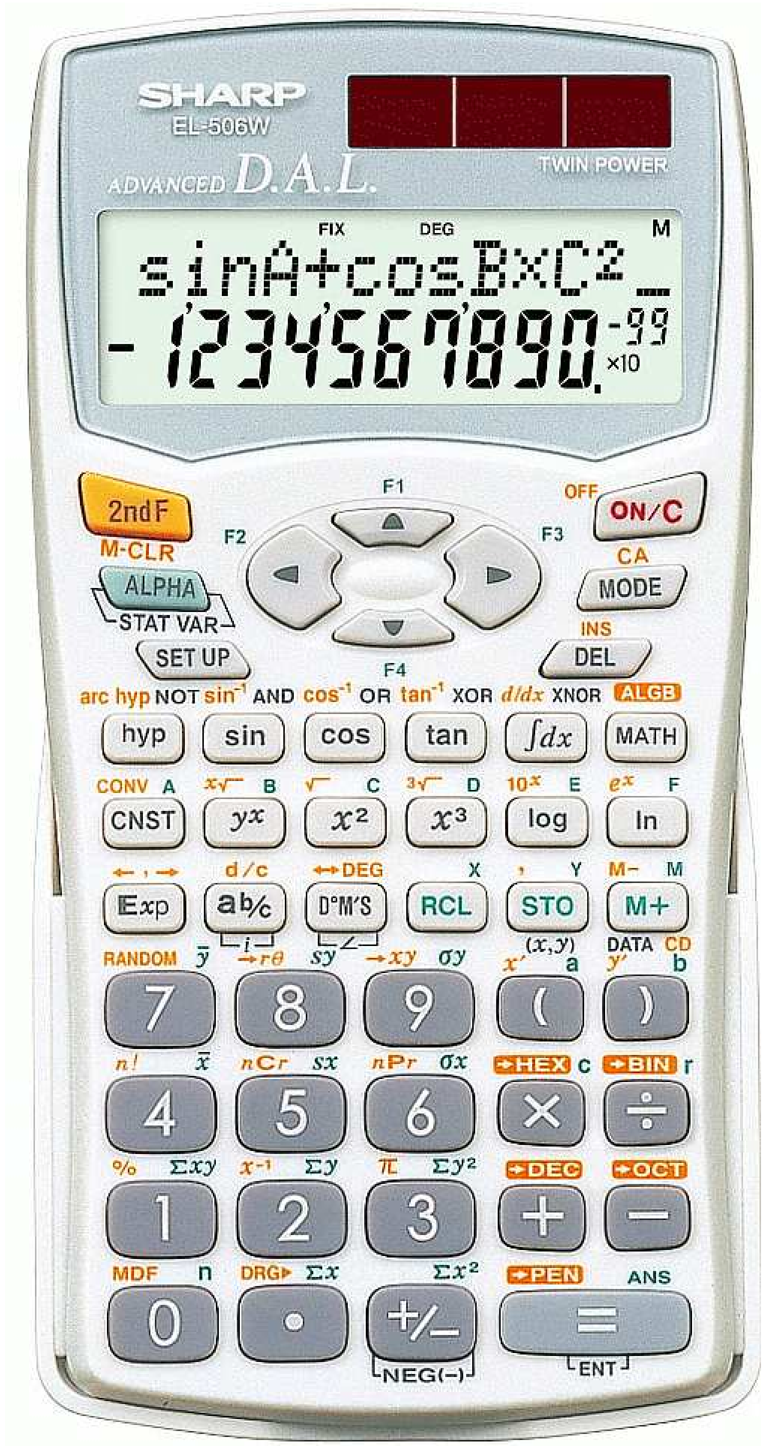
Če pogledate v kazalo, boste hitro ugotovili, da matematika niso samo realne funkcije, po drugi strani pa brez njih ne gre. Realnim funkcijam in drugim temam iz tako imenovane matematične analize je posvečenih prvih šest poglavij. Sledi predstavitev osnovnih tehnik numerične matematike. Osmo in deveto poglavje sta iz linearne algebre, deseto pa podaja uvod v moderno statistiko. Sledi poglavje namenjeno metodam optimizacije, ki pa je le skica brez prevelikih podrobnosti. Žal za ta izredno koristen del matematike v učnem načrtu ni dovolj časa, zato bo tisti, ki bi želel reševati realne optimizacijske probleme, gotovo moral poseči po specializiranih knjigah. Enako velja tudi za poglavji o številskih sistemih in preklopnih funkcijah, ki spadata v diskretno matematiko.

Zakaj so v skripti ravno ta poglavja? Odgovor je preprost in vas lahko motivira pri učenju. Poleg učnega načrta, ki podaja osnovne smernice, sem se pri izbiri snovi zgledoval po modernih kalkulatorjih. Oglejte si npr. sliko kalkulatorja SHARP EL-506W na koncu predgovora (izbran čisto naključno in ni nujno, da sami uporabljate ravno tega). V zgornji vrsti so tipke sin, cos, tan, sin^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1} . To so kotne funkcije. V zgornjem delu imamo tudi x^2, x^3, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[x]{\ }$ (potenčne funkcije), y^x, 10^x, e^x (eksponentne funkcije) ter log in ln (logaritemski funkciji). Tipka ↔DEG preklaplja med stopinjami in radiani. Nad številkami so napisi n, Σx, Σx^2, Σxy, Σy, Σy^2, $\bar{x}$, sx, , σx, $\bar{y}$, sy in σy. Te funkcije uporabljamo pri statistiki. Nad oklepajema so črke a, b in r. Uporabljamo jih pri izračunu linearne regresije. Desno spodaj so napisi →HEX, →BIN, →DEC in →OCT. Z njimi pretvarjamo med različnimi številskimi sistemi. Če preklopimo na šestnajstiški sistem, ki ga pogosto uporabljajo računalnikarji, potrebujemo črke od A do F v drugi vrsti zgoraj. Funkcije NOT, AND, OR, XOR in XNOR so preklopne funkcije. Tipka ANS je značilna za kalkulatorje z algebraičnim vnosom (pri njih matematične izraze vnašamo od leve na desno tako, kot so zapisani na papirju) in nam npr. koristi pri numeričnih metodah za iskanje ničle. V sredini tipkovnice najdemo tipke i, z, $\to r\theta$ in $\to xy$. Z njihovo pomočjo računamo s kompleksnimi števili. Kalkulator zna celo numerično integrirati (tipka $\int dx$) in računati z matrikami (ni prikazano na tipkovnici). Skratka, zna (skoraj) vse, o čemer govori tale skripta. Ali drugače povedano, študent, ki bo skripto naštudiral, bo razumel in koristno uporabljal vse tipke na današnjih znanstvenih kalkulatorjih. Verjetno se strinjate, da se za vsakega inženirja tehnike spodobi, da pozna vsaj toliko matematike kot dobrih 20€ vreden kalkulator.

Pričujoča skripta ne more biti priročnik za prave inženirske probleme. Ko odgovora ne najdete v skripti, odprite Bronštejnov Matematični priročnik. Da se boste lažje znašli tam, so v vsakem poglavju podane strani, kje obravnavano snov najdete v Bronštejnu.

Pa še kratko pojasnilo. To je **druga, popravljena različica** skripte. Opozoril bi predvsem na spremembe v poglavju o statistiki, kjer je bilo v prvi verziji "čuda" napak. Žal so nekatera poglavja še vedno pomanjkljivo napisana, na koncu skripte pa del razlage celo manjka. Seveda pa napake v skripti in njene pomanjkljivosti ne morejo biti razlog za vaše neznanje, zato le skrbno sledite predavanjem ter vajam in si delajte svoje zapiske.

Robert Meolic



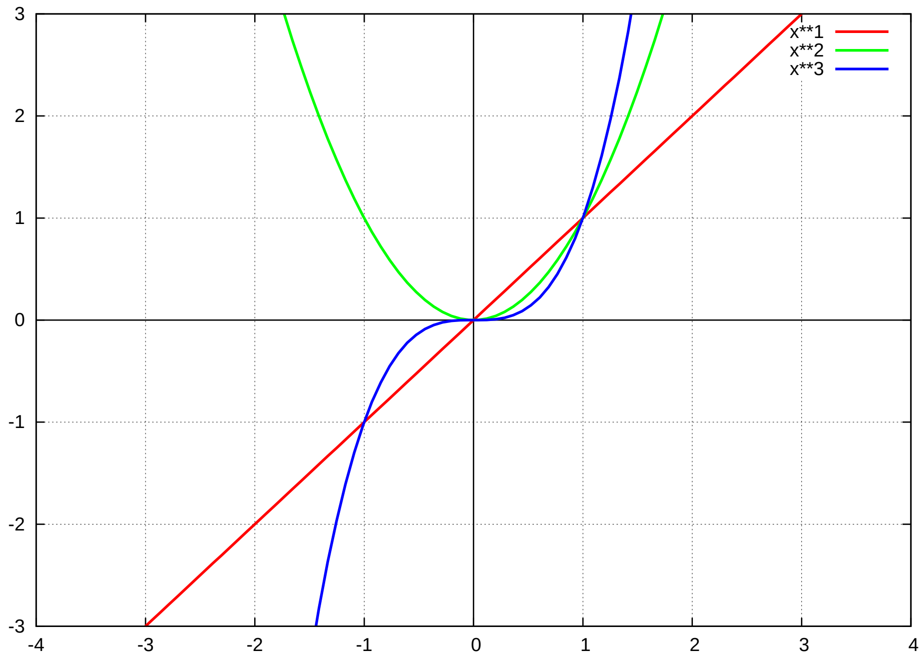
Linux, Latex, Texmaker in Gnuplot

Pisanje matematičnih tekstov je izziv zaradi velike količine raznih simbolov, enačb, tabel, matrik in grafov. Nihče ne zna tega kar "stresti iz rokava". Po drugi strani pa se študenti tehnike ne bi smeli bati pisanja matematičnih besedil in uporabe matematičnih računalnikih orodij.

Pričujoča skripta je nastala na sistemu Linux (distribucija Edubuntu) s programom LaTeX. Uporabljen je bil urejevalnik besedil Texmaker v1.5. Grafi so narisan z orodjem Gnuplot v4.0. Vsa uporabljena programska oprema je brezplačna.

Gnuplot je zmogljivo orodje za risanje grafov. Program, s katerim smo npr. narisali sliko 1.1, se glasi takole:

```
set terminal postscript eps color solid;
set output 'graf-1-1.eps';
set grid;set zeroaxis linetype -1;set size 1.0;
set xrange[-4:4];set yrange[-3:3];
plot x**1 lw 4,x**2 lw 4,x**3 lw 4;
```



Več informacij najdete na internetu:

- http://www.edubuntu.org/
- http://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX
- http://www.xm1math.net/texmaker/index.html
- http://www.gnuplot.info/

Kazalo

POGLAVJE 1

FUNKCIJE

Matematični priročnik, str. 1-13, 26-29, 34-37, 46-65

1.1 Uvod

Osnova moderne matematike so množice.

Množica je skupek reči, ki jim pravimo **elementi** množice.

Množice označujemo z velikimi črkami. elemente pa z majhnimi črkami.

Primeri:

$A = \{1, 2, 3\}$ množica A ima 3 elemente

$B = \{\triangle, \square\}$ množica B ima 2 elementa

$1 \in A, 4 \notin A$ pripada, ne pripada

Množica lahko ima neskončno število elementov, npr. množica sodih števil.

Osnovne številske množice imajo svoje oznake:

$\mathbb{N}$ - naravna števila: $1, 2, 3, 4, ...$

$\mathbb{Z}$ - cela števila: $-2, -1, 0, 1, 2, ...$

$\mathbb{Q}$ - racionalna števila: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$

$\mathbb{R}$ - realna števila: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

S pomočjo teh oznak lahko zapišemo številne številske množice, npr.:

$$S = \{x | x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$$

Oznaka za neskončno je ∞, vendar moramo biti pri uporabi tega znaka zelo previdni, ker ∞ ni število!

Kartezični produkt dveh množic je množica parov:

$$A \times B = \{(1, \triangle), (1, \square), (2, \triangle), (2, \square), (3, \triangle), (3, \square)\}$$

Relacijo **je podmnožica** označimo s simboloma $\subset$ in $\subseteq$.

Interval je podmnožica realnih števil.

Primeri:

$[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$ zaprt interval

$(a, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ odprt interval

$[a, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$ delno odprt interval oz. delno zaprt interval

Preslikava množice A **v množico** B je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natančno določen element iz množice B. Definiramo jo lahko kot:

- $f : A \longrightarrow B$, kjer je A definicijsko območje preslikave, B pa zaloga vrednosti preslikave,
- $f : a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, \ldots$, kjer so $a_1, a_2, \ldots$ elementi, ki se preslikujejo, $b_1, b_2, \ldots$ pa njihove slike.

Preslikave oblike $A \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}$, imenujemo **realne funkcije**. Upodobitev realne funkcije v kartezičnem sistemu imenujemo **graf realne funkcije**. Realne funkcije, ki jih znamo zapisati s formulo, so **elementarne funkcije**.

Osnovne elementarne funkcije so:

- potenčna funkcija,
- eksponentna funkcija,
- logaritemska funkcija,
- kotne (trigonometrijske) funkcije.

Najbolj znane **sestavljene elementarne funkcije** so:

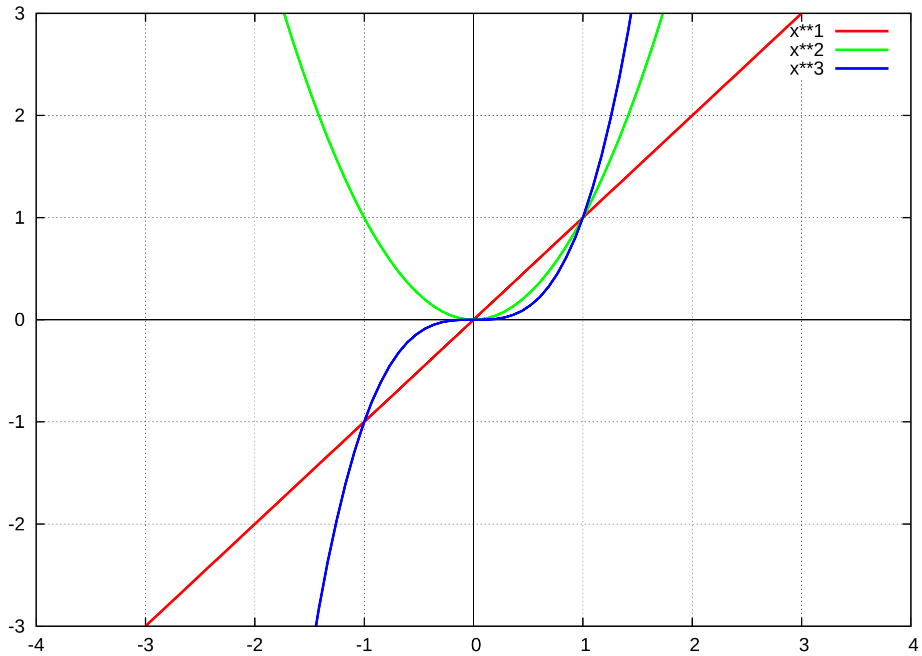
- linearna funkcija,
- kvadratna funkcija,
- polinomska funkcija,
- racionalna funkcije.

1.2 Potenčna funkcija

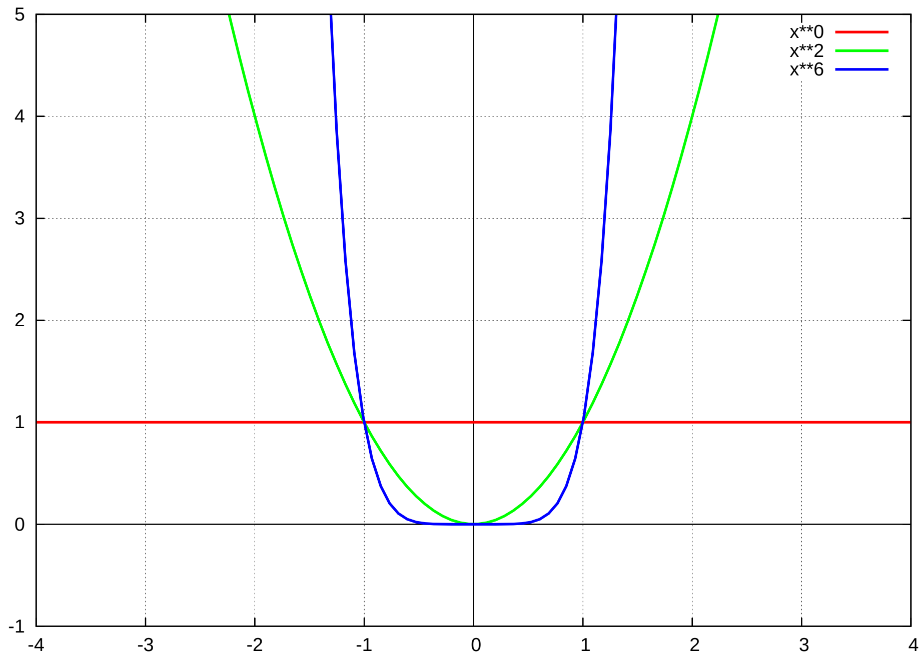
Potenčna funkcija ima obliko $y = x^a, a \in \mathbb{R}$.

Naloge:

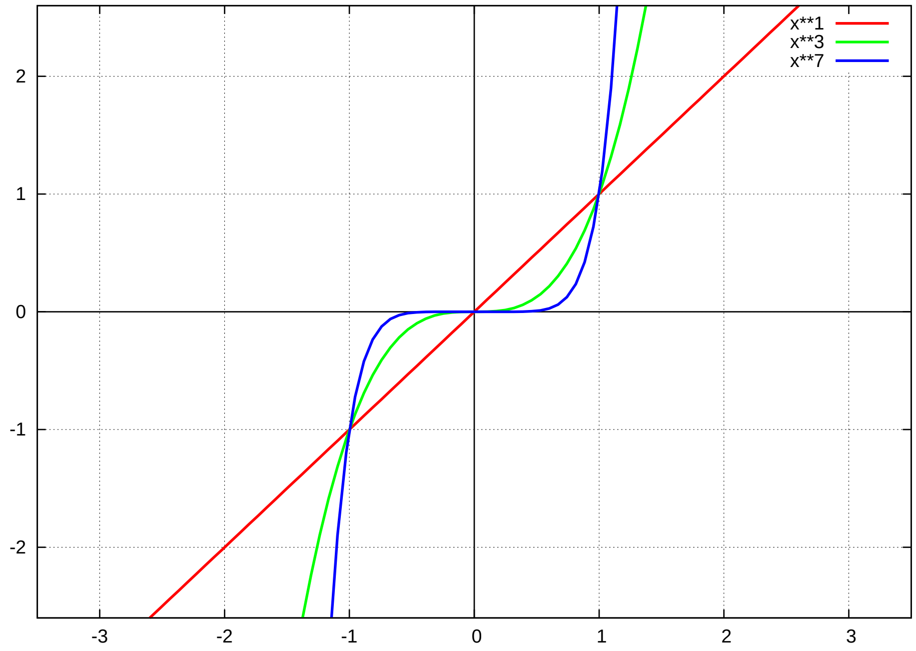
▲ Skiciraj funkcije $y = x^1, y = x^2, y = x^3$



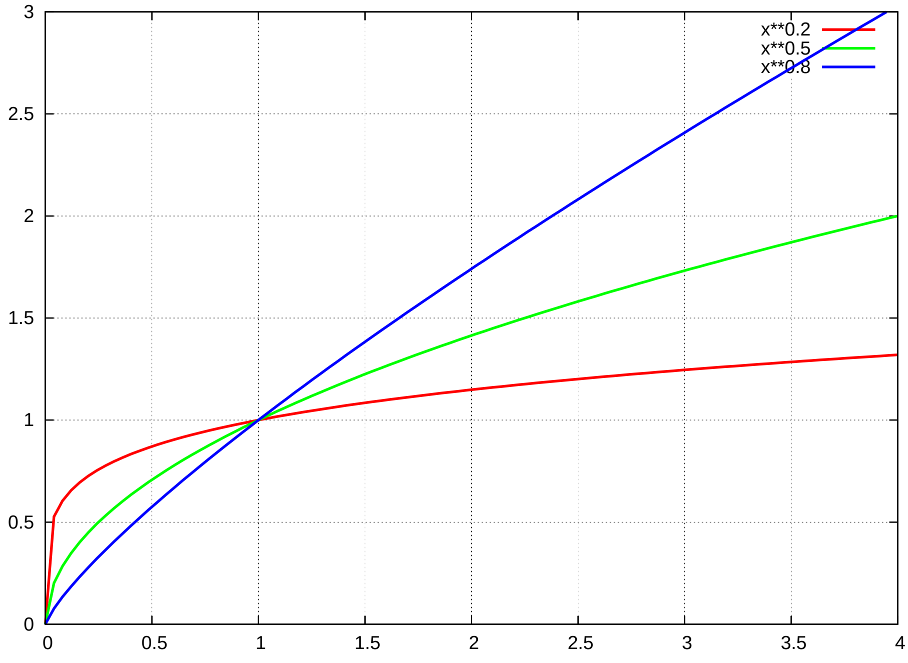
▲ Skiciraj funkcije $y = x^0, y = x^2, y = x^6$



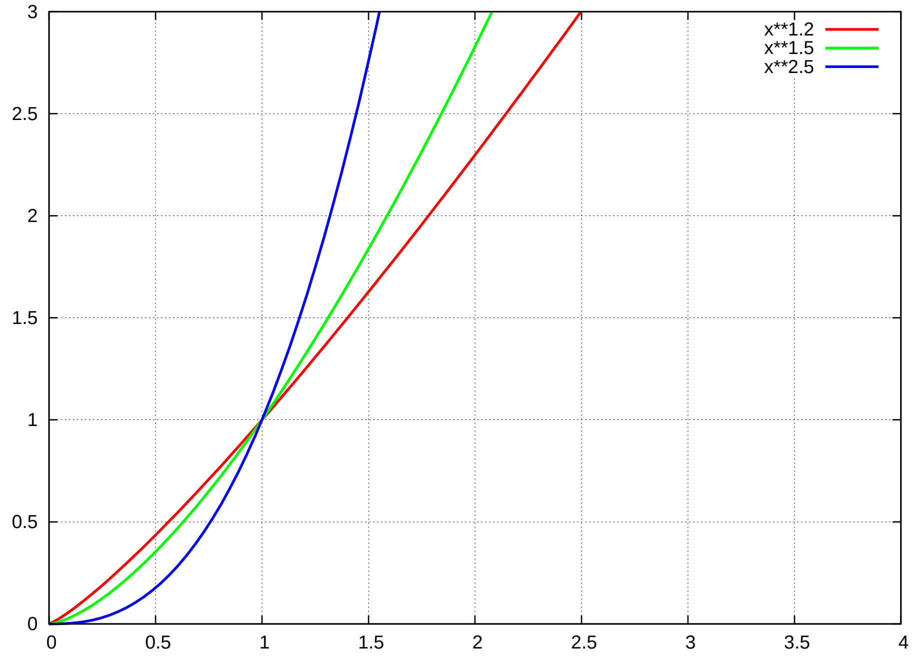
▲ Skiciraj funkcije $y = x^1, y = x^3, y = x^7$



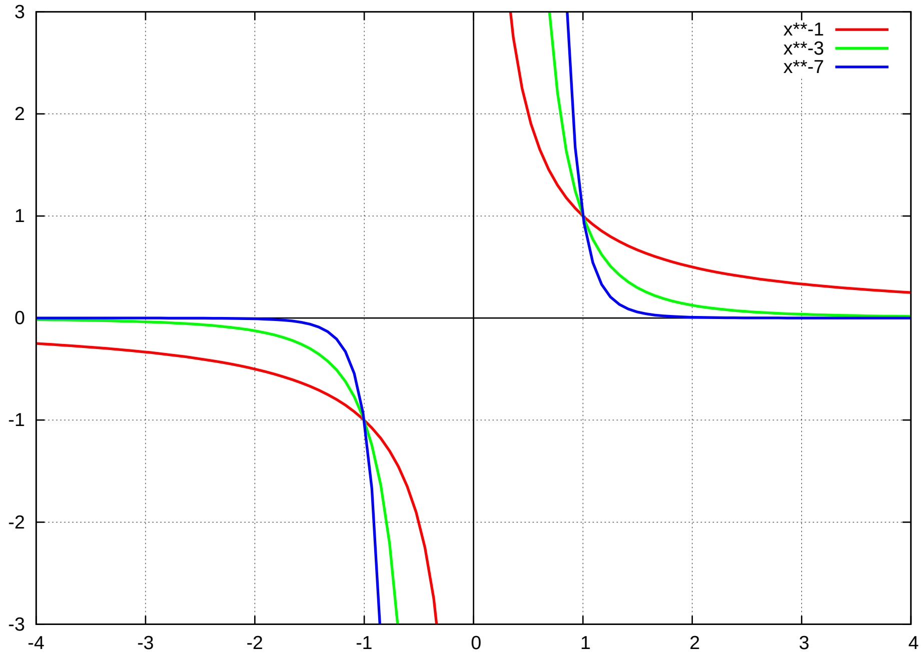
▲ Skiciraj funkcije $y = x^{0,2}, y = x^{0,5}, y = x^{0,8}$



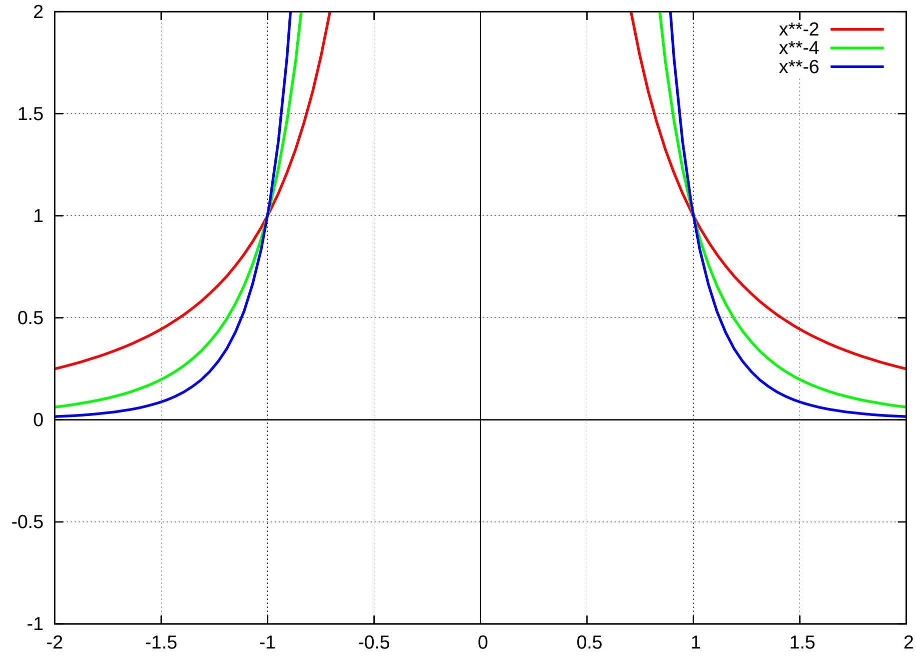
▲ Skiciraj funkcije $y = x^{1,2}, y = x^{1,5}, y = x^{2,5}$



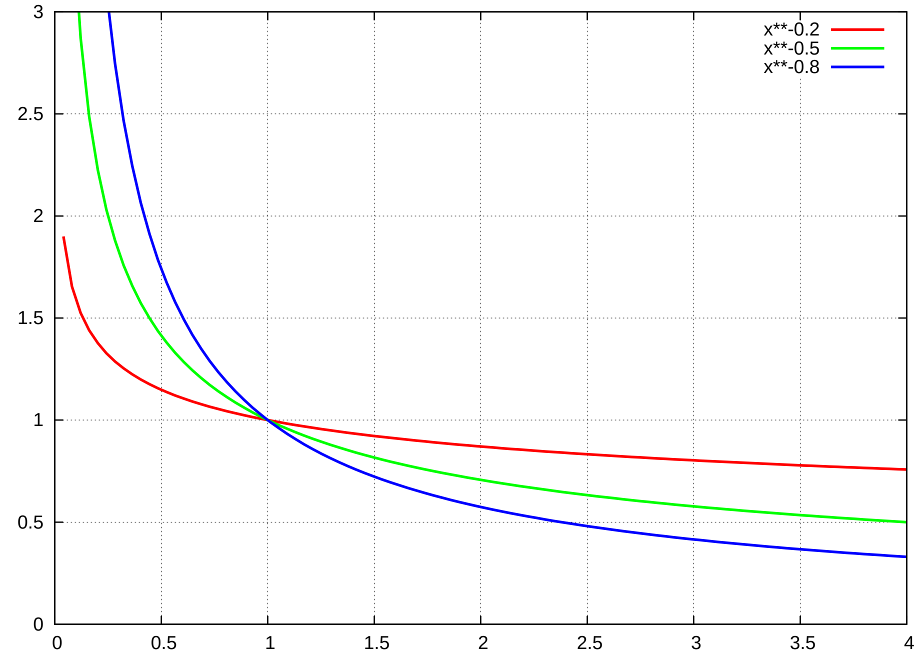
▲ Skiciraj funkcije $y = x^{-1}, y = x^{-3}, y = x^{-7}$



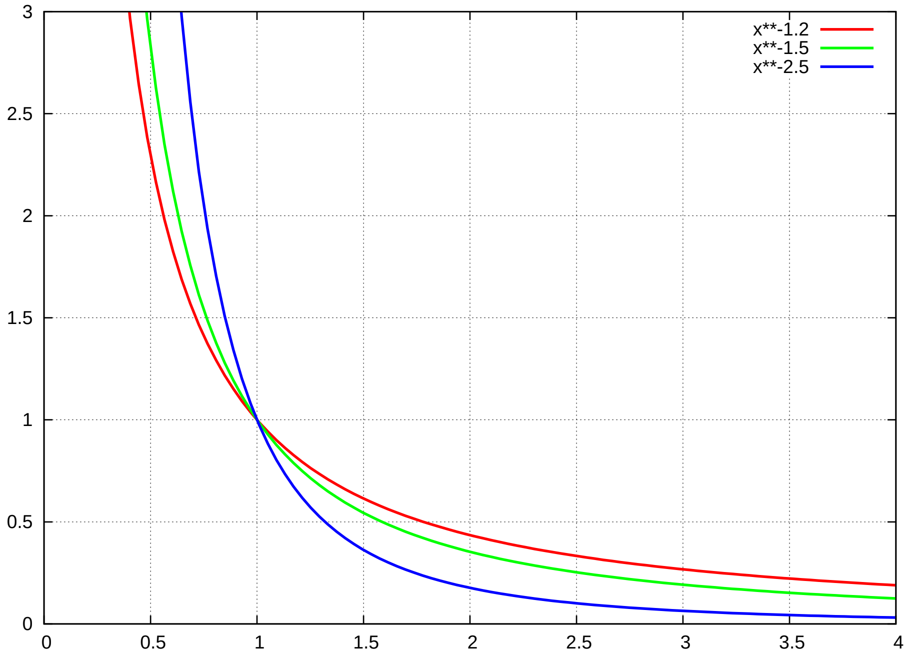
▲ Skiciraj funkcije $y = x^{-2}, y = x^{-4}, y = x^{-6}$



▲ Skiciraj funkcije $y = x^{-0,2}, y = x^{-0,5}, y = x^{-0,8}$



▲ Skiciraj funkcije $y = x^{-1{,}2}, y = x^{-1{,}5}, y = x^{-2{,}5}$



Pojasnilo:

$$y = x^{-0{,}5} = \frac{1}{x^{0{,}5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$y = x^{-1{,}5} = \frac{1}{x^{1{,}5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

V splošnem je definicijsko območje potenčnih funkcij nadmnožica intervala $(0, \infty)$.

Funkcije $y = x^2, y = x^4, y = x^{-2}, y = x^{-4}, \ldots$ so sode funkcije (simetrične na os y).

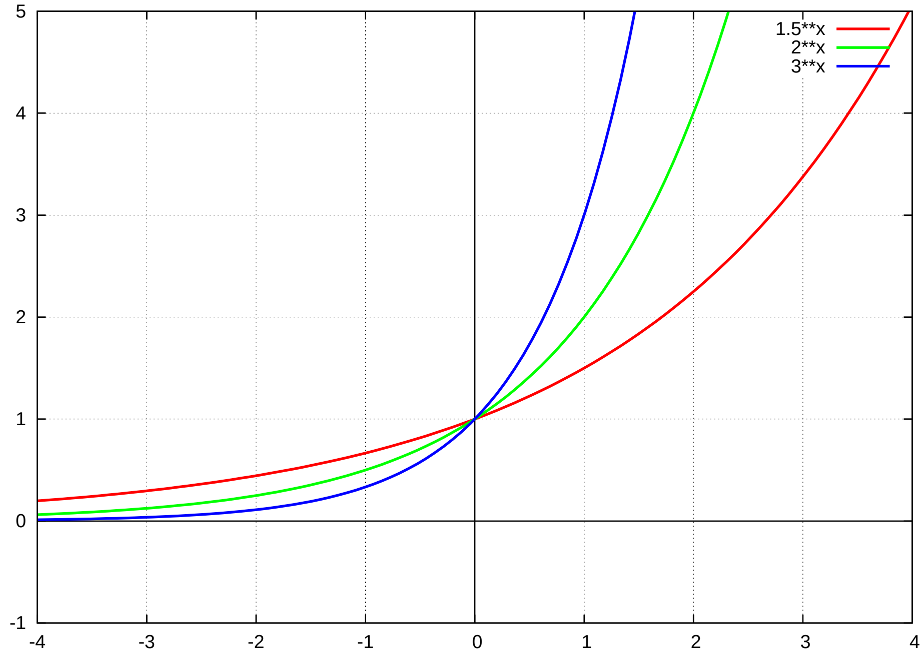
Funkcije $y = x, y = x^3, y = x^{-1}, y = x^{-3}, \ldots$ so lihe funkcije (simetrične na $y = -x$).

1.3 Eksponentna funkcija

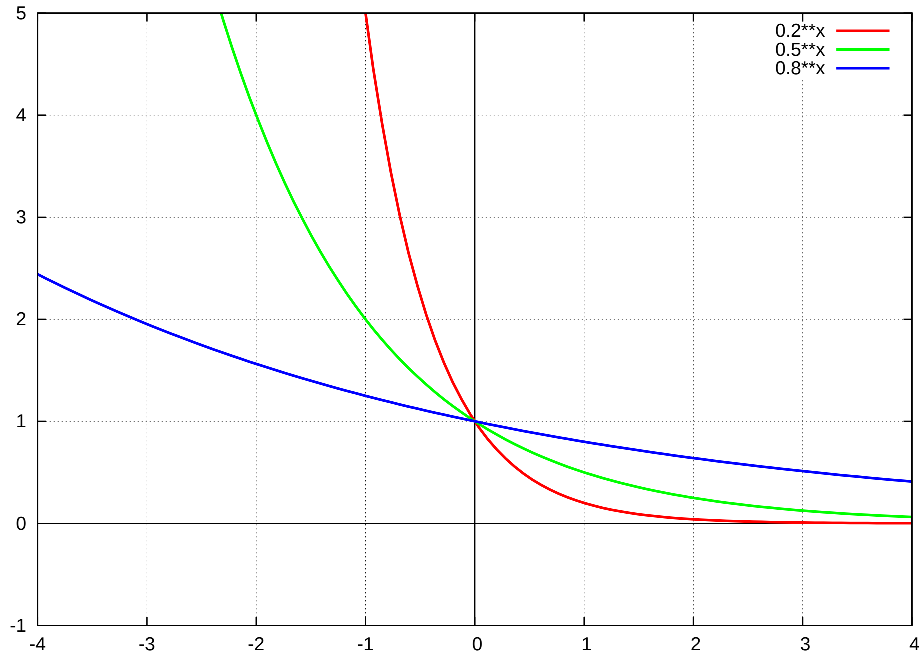
Eksponentna funkcija ima obliko $y = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Naloge:

▲ Skiciraj funkcije $y = 1,5^x, y = 2^x, y = 3^x$



▲ Skiciraj funkcije $y = 0,2^x, y = 0,5^x, y = 0,8^x$

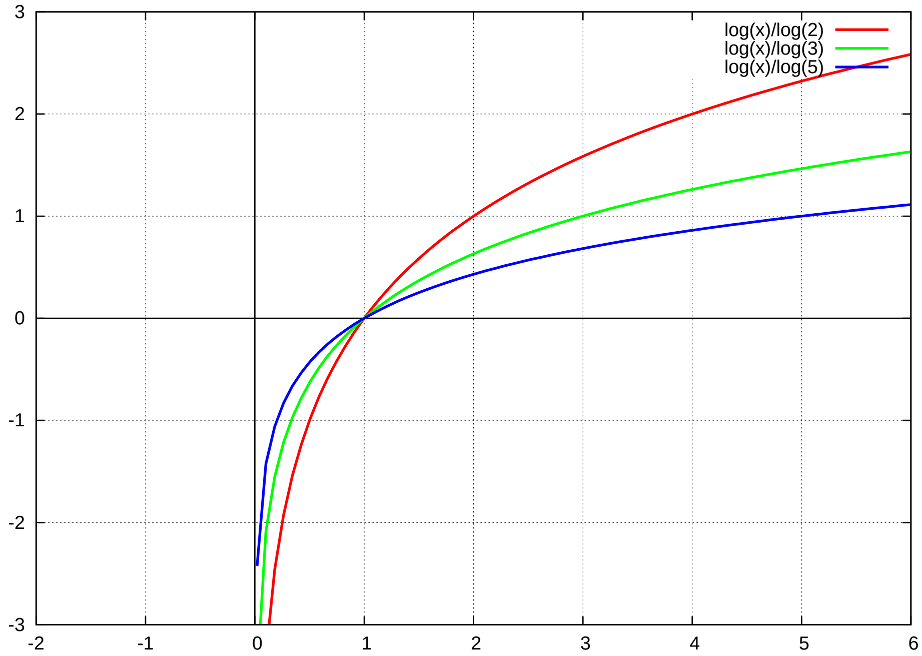


1.4 Logaritemska funkcija

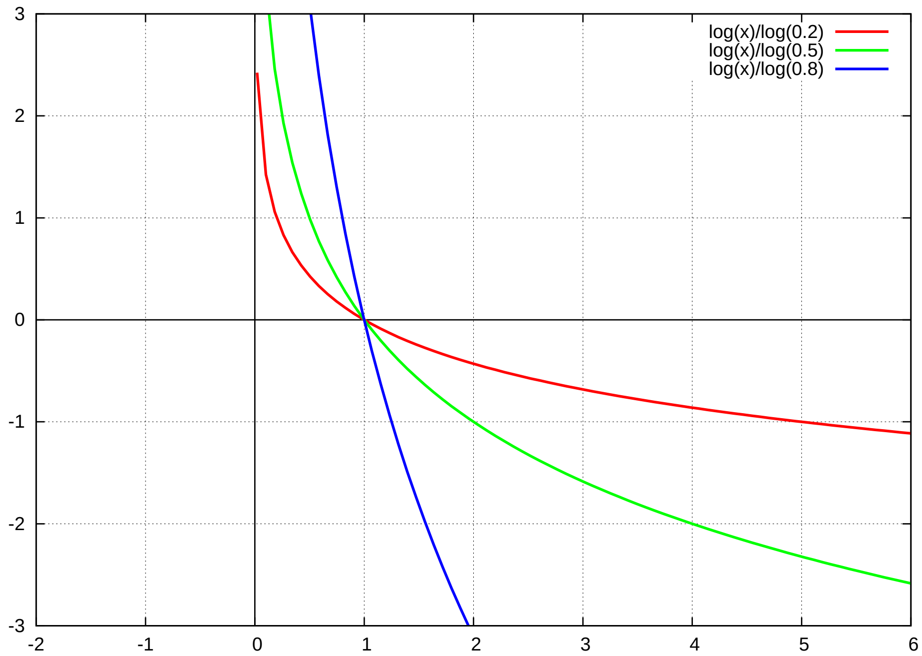
Logaritemska funkcija ima obliko $y = \log_a x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$.

Naloge:

▲ Skiciraj funkcije $y = \log_2 x, y = \log_3 x, y = \log_5 x$



▲ Skiciraj funkcije $y = \log_{0,2} x, y = \log_{0,5} x, y = \log_{0,8} x$

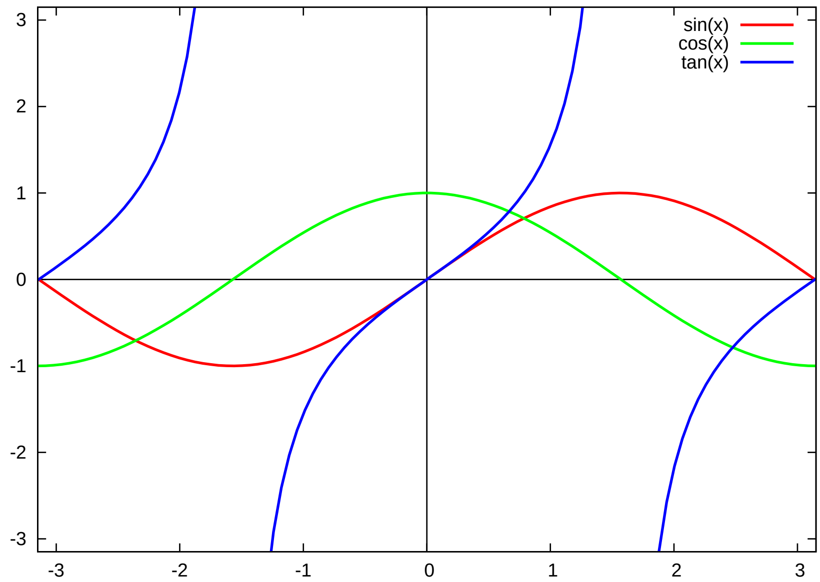


▲ Izračunaj vrednosti naslednjih logaritmov: $\log_2 10$, $\log_1 050$, $\log_3 100$

▷ domača naloga

1.5 Kotne funkcije

Osnovne kotne funkcije so $y = \sin x$, $y = \cos x$ in $y = \operatorname{tg} x$.

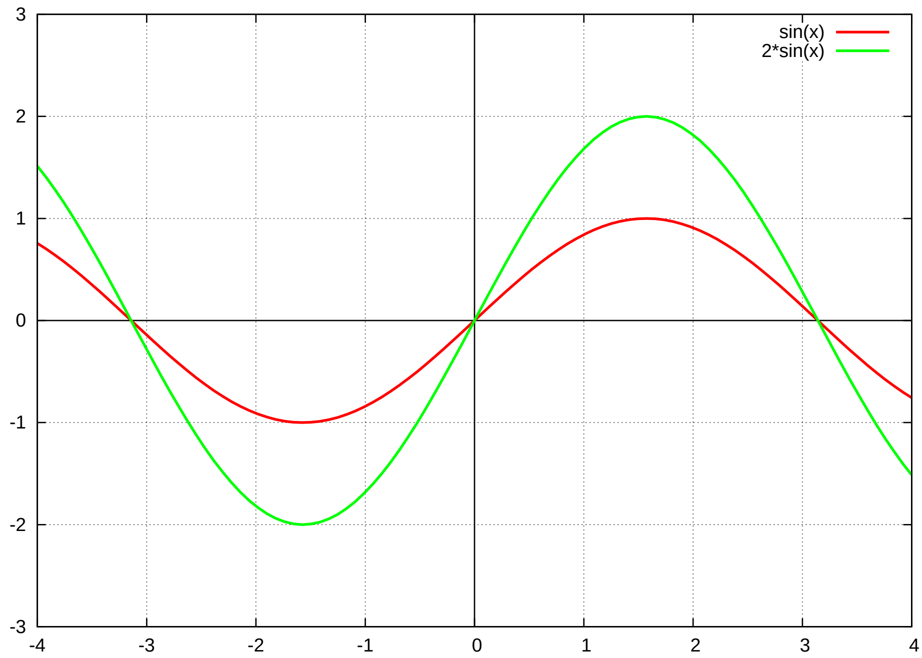


V splošni obliki sinusno funkcijo zapišemo kot $y = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$, kjer je:

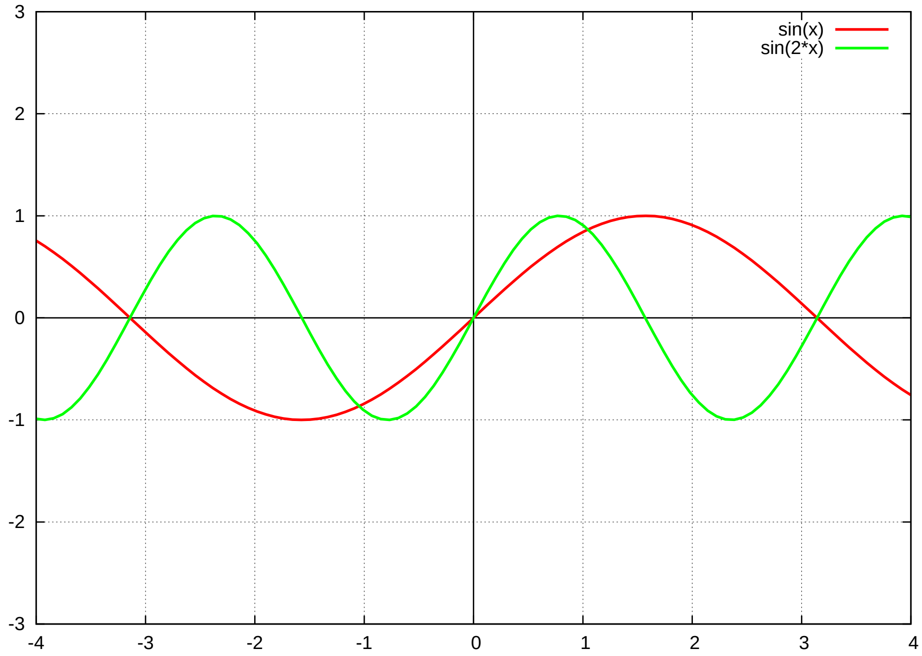
- A - amplituda,
- ω - frekvenca in
- φ - fazni premik ($+\varphi$ = levo, $-\varphi$ = desno)

Naloge:

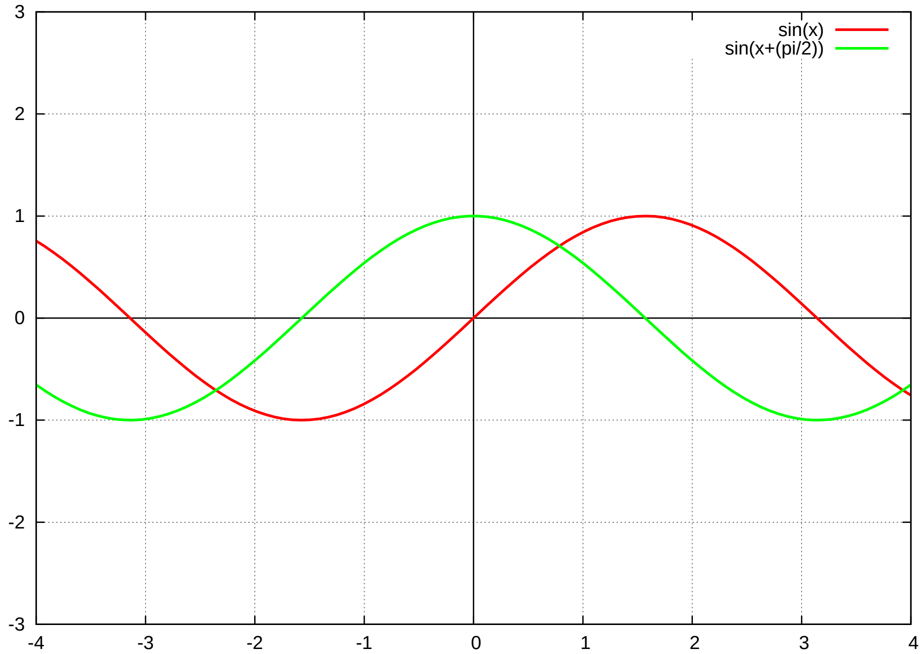
▲ Skiciraj funkcijo $y = 2 \cdot \sin x$



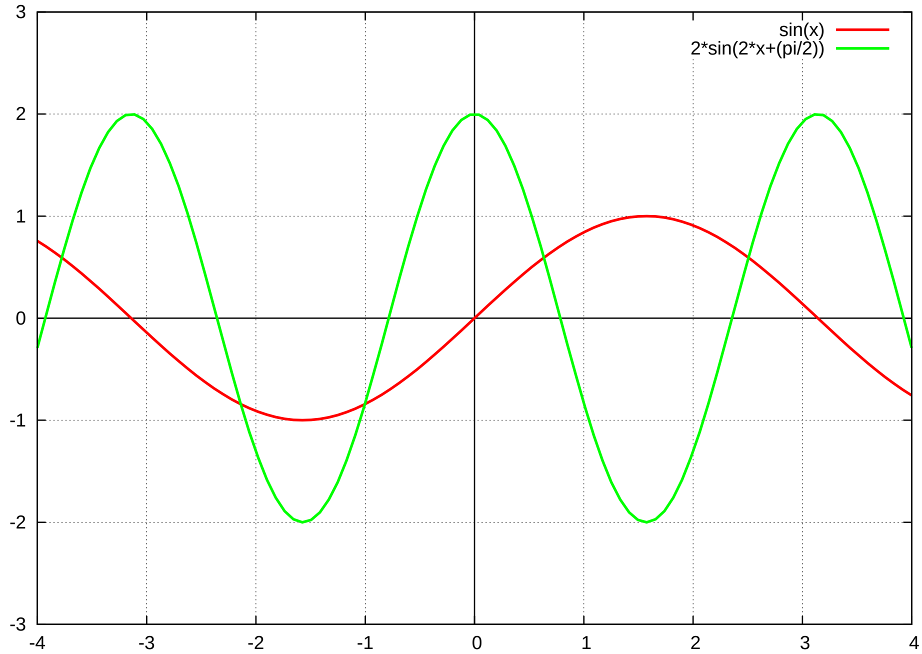
▲ Skiciraj funkcijo $y = \sin(2 \cdot x)$



▲ Skiciraj funkcijo $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



▲ Skiciraj funkcijo $y = 2 \cdot \sin(2 \cdot x + \frac{\pi}{2})$



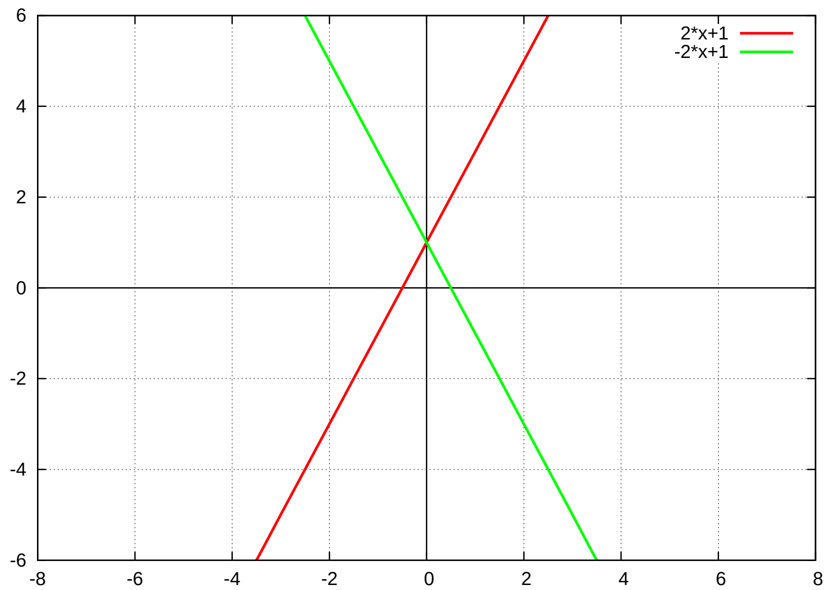
1.6 Linearna funkcija

Linearna funkcija ima obliko $y = \text{ax} + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Koeficient a vpliva na strmino premice, koeficient b pa na presečišče z osjo y.

Naloga:

▲ Skiciraj funkciji $y = 2x + 1, y = -2x + 1$



1.7 Kvadratna funkcija

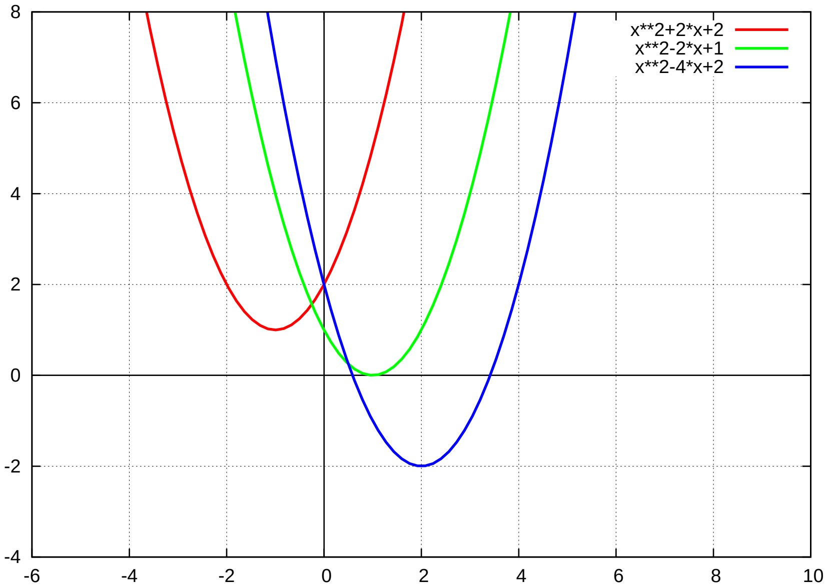
Kvadratna funkcija ima obliko $y = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Obliko kvadrante funkcije določimo glede na vodilni koeficient a in glede na vrednost **diskriminante** $D = b^2 - 4\,\mathrm{ac}$.

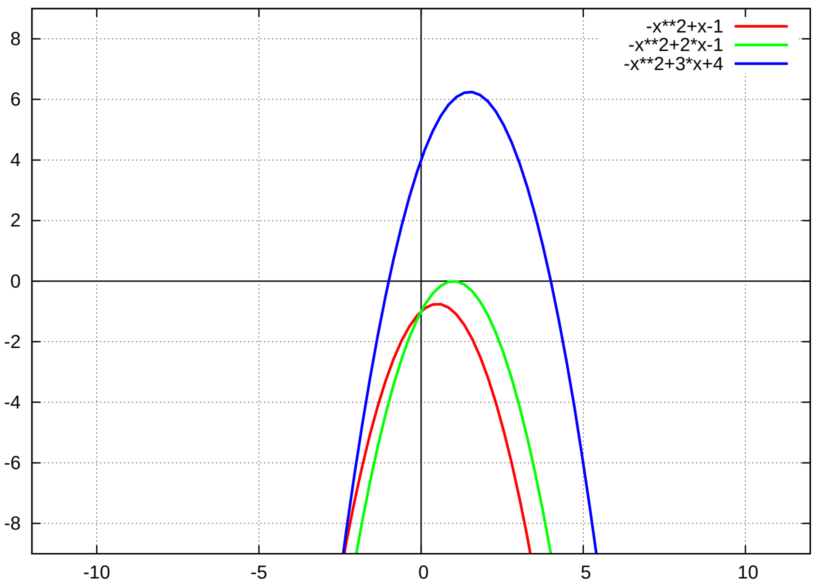
Ekstrem kvadratne funkcije je točka (p, q), ki jo imenujemo **teme** in jo izračunamo kot $p = -\dfrac{b}{2a}, q = -\dfrac{D}{4a}$.

Naloge:

▲ Skiciraj funkcije $y = x^2 + 2x + 2, y = x^2 - 2x + 1, y = x^2 - 4x + 2$



▲ Skiciraj funkcije $y = -x^2 + x - 1, y = -x^2 + 2x - 1, y = -x^2 + 3x + 4$

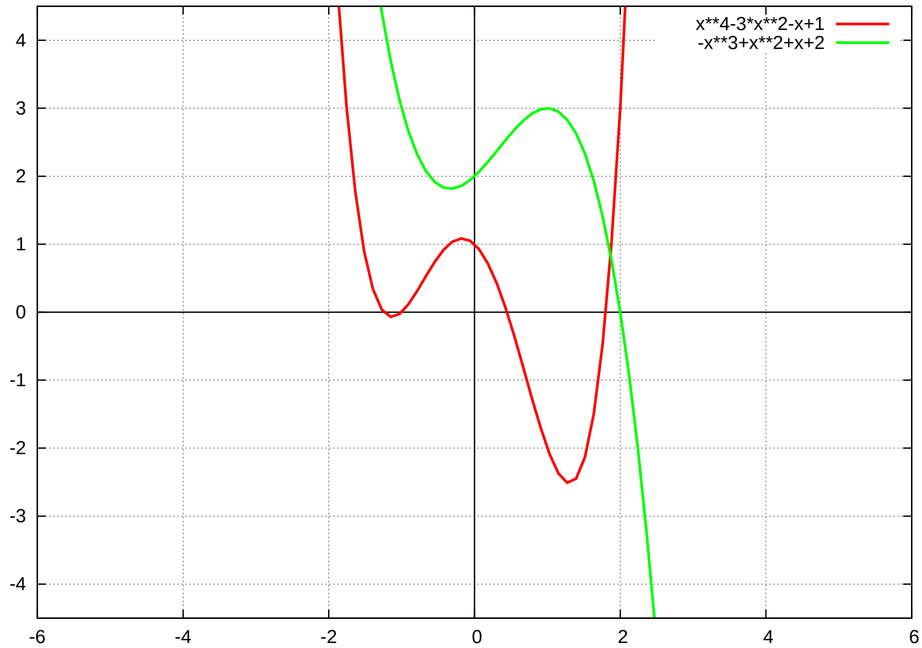


1.8 Polinomska funkcija

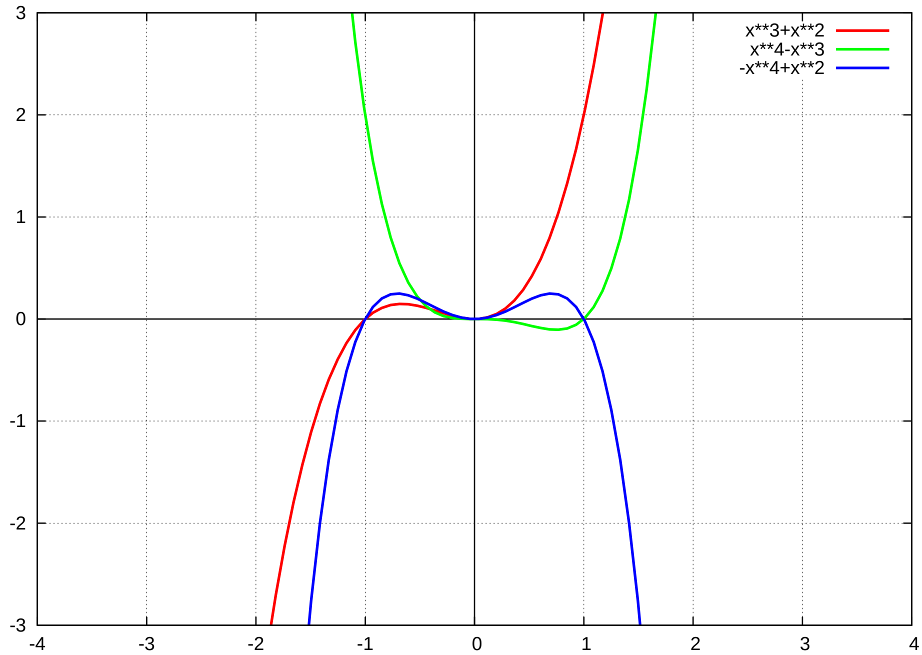
Polinomska funkcija stopnje n ima obliko $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Daleč od osi y se polinomska funkcija obnaša približno tako, kot če bi vse koeficiente a_i, razen a_n, postavili na 0.

Naloge:

▲ Skiciraj funkciji $y = x^4 - 3x^2 - x + 1, y = -x^3 + x^2 + x + 2$



▲ Skiciraj funkcije $y = x^3 + x^2, y = x^4 - x^3, y = -x^4 + x^2$



Točke, v katerih funkcija seka os x imenujemo **ničle funkcije**. Ničle polinomske funkcije lahko določimo na različne načine:

1. Po formuli (za polinomske funkcije do vključno tretje stopnje)
2. Z razčlenjevanjem
3. S pomočjo Hornerjevega algoritma
4. Z numeričnimi metodami

1.9 Racionalna funkcija

Racionalna funkcija ima obliko $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kjer sta $P(x)$ in $Q(x)$ polinomski funkciji.

Pri racionalnih funkcijah določamo:

- ničle - so enake ničlam polinomske funkcije v števcu,
- pole - so enaki ničlam polinomske funkcije v imenovalcu,
- asimptoto - dobimo jo z deljenjem polinomov in
- presečišče z osjo y - dobimo ga tako, da vstavimo $x = 0$.

Ničle in poli so lahko lihe ali pa sode stopnje.

Naloge:

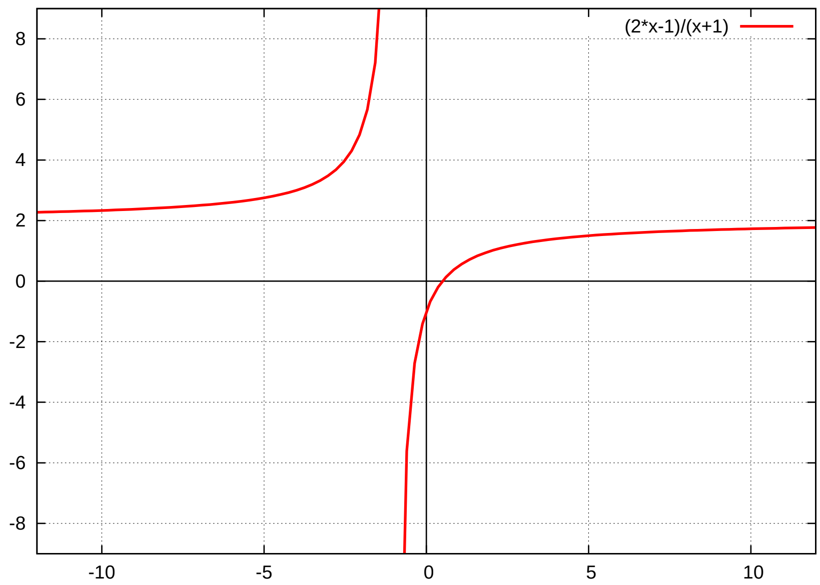
▲ Skiciraj funkcijo $y = \frac{2x-1}{x+1}$

▷ Ničla: $+\frac{1}{2}$ (prve stopnje)

Pol: -1 (prve stopnje)

Asimptota: $y = 2$

Presečišče z y: $y = -1$



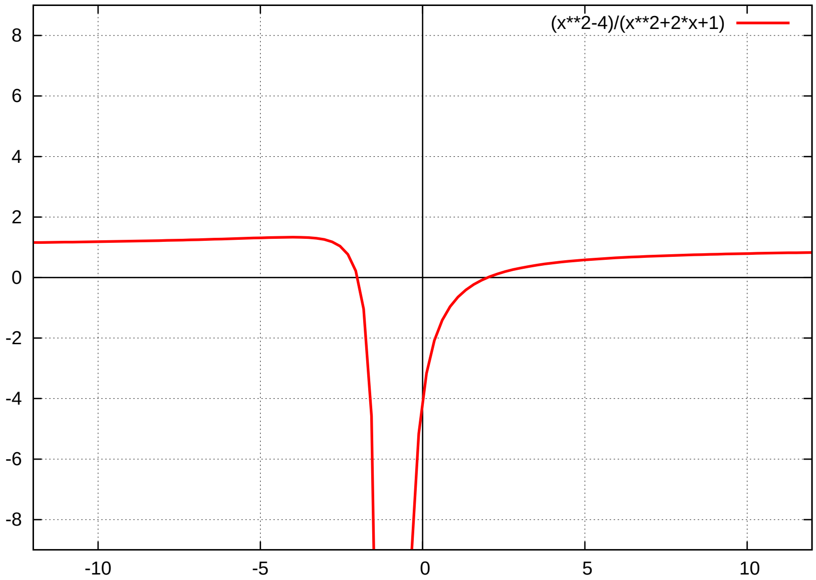
▲ Skiciraj funkcijo $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}$

▷ Ničle: $-2, +2$ (obe ničli prve stopnje)

Pol: -1 (druge stopnje)

Asimptota: $y = 1$

Presečišče z y: $y = -4$



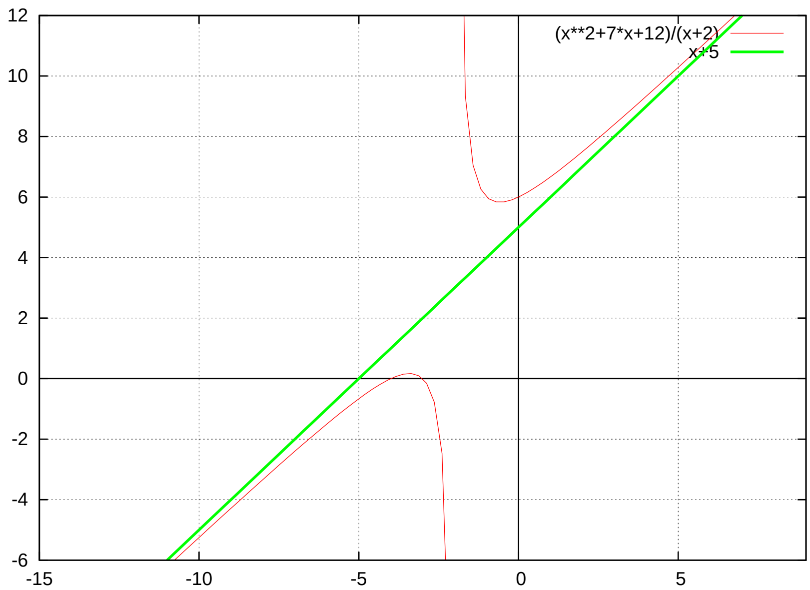
▲ Skiciraj funkcijo $y = \dfrac{x^2+7x+12}{x+2} = \dfrac{(x+3)(x+4)}{x+2}$

▷ Ničle: $-3, -4$ (obe ničli prve stopnje)

Pol: -2 (prve stopnje)

Asimptota: $y = x + 5$

Presečišče z y: $y = 6$



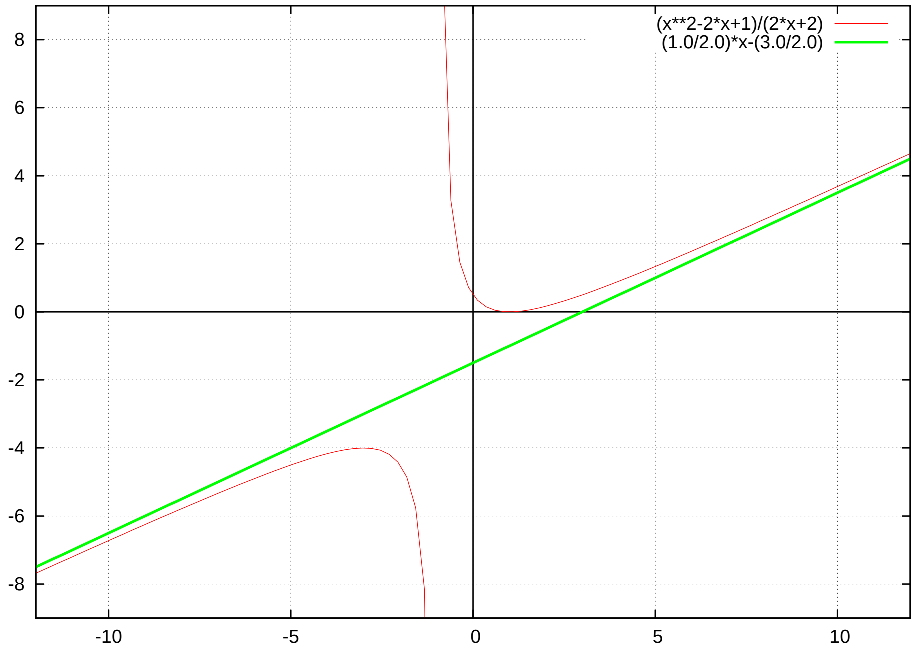
▲ Skiciraj funkcijo $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x + 2} = \dfrac{(x-1)(x-1)}{2(x+1)}$

▷ Ničla: $+1$ (druge stopnje)

Pol: -1 (prve stopnje)

Asimptota: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Presečišče z y: $y = \frac{1}{2}$



▲ Skiciraj funkcijo $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$

▷ domača naloga

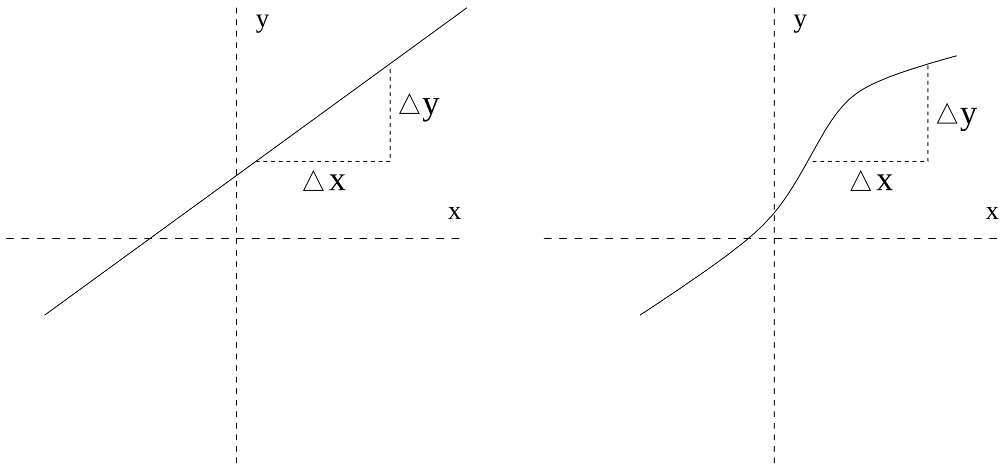
POGLAVJE 2

ODVODI

Matematični priročnik, str. 272-276, 278-281

2.1 Definicija in notacija

Odvod funkcije v dani točki nam pove, kako strma je funkcija v tej točki.



Ugotovitev s slike zapišemo s formulo: $f'(x) = \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{y_1 - y_0}{\triangle x} = \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

Če je graf funkcije neravna krivulja, je rezultat te formule odvisen od velikosti $\triangle x$ in je le približek prave vrednosti.

Manjši kot je $\triangle x$, boljši približek dobimo. Natančen rezultat dobimo, če v formulo vpeljemo limito:

$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \dfrac{f(x + \mathrm{dx}) - f(x)}{\mathrm{dx}}$

V zvezi z odvodom uporabljamo različne simbole.

Naj bo $y = f(x)$. Potem lahko zapišemo:

$$f'(x) = y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d}{\mathrm{dx}}y$$

Če naredimo odvod večkrat zapored, dobimo odvode višjih stopenj.

$$f''(x) = y'' = \frac{d}{\mathrm{dx}}\frac{d}{\mathrm{dx}}y = \frac{d^2}{\mathrm{dx}^2}y = \frac{d^2y}{\mathrm{dx}^2}$$

Primera:

- Zapis $\frac{d}{\mathrm{dx}}(x^3+1)$ pomeni odvod funkcije $f(x) = x^3 + 1$.
- Zapis $\frac{d^2}{\mathrm{dx}^2}(x^3+1)$ pomeni drugi odvod funkcije $f(x) = x^3 + 1$.

Člen $\mathrm{dy} = f'(x) \cdot \mathrm{dx}$ imenujemo **diferencial** funkcije $f(x)$ in nam pove, za koliko se spremeni vrednost funkcije, če se pomaknemo za malenkost v levo oz. desno.

Odvod funkcije je tudi funkcija! Izračunamo jo tako, da rešimo limito. Ker je to težavno, si pomagamo s **pravili za odvajanje** in **tabelo odvodov elementarnih funkcij**.

2.2 Pravila za odvajanje

1. $y = c \cdot f(x) \qquad y' = c \cdot f'(x)$
2. $y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $y = f(x) \cdot g(x) \qquad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$
5. $y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Naloge:

▲ Odvajaj $y = x^2$

▷ $y' = 2x$

▲ Odvajaj $y = x^3$

▷ $y' = 3x^2$

▲ Odvajaj $y = x^2 + x^3$

▷ $y' = 2x + 3x^2$

▲ Odvajaj $y = x^2 \cdot x^3$

▷ $y' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$

▲ Odvajaj $y = \frac{x^2}{x^3}$

▷ $y' = \frac{2x \cdot x^3 - x^2 \cdot 3x^2}{x^3 \cdot x^3} = \frac{2x^4 - 3x^4}{x^6} = \frac{-x^4}{x^6} = -\frac{1}{x^2}$

▲ Odvajaj $y = (x^3)^2$

▷ $y' = 2(x^3) \cdot 3x^2 = 6x^5$

2.3 Odvodi elementarnih funkcij

1. $y = x^a \qquad y' = a \cdot x^{a-1}$
2. $y = a^x \qquad y' = a^x \cdot \ln a \qquad a > 0, a \neq 1$
3. $y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad a > 0, a \neq 1$
4. $y = \sin x \qquad y' = \cos x$
5. $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

Naloge:

▲ Odvajaj $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

▷ $y' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

▲ Odvajaj $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

▷ $y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

▲ Odvajaj $y = \sqrt{1-x}$

▷ $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

▲ Odvajaj $y = x \cdot \sqrt{1-x}$

▷ $y' = 1 \cdot \sqrt{1-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \ldots = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

▲ Odvajaj $y = \frac{x-1}{x+1}$

▷ domača naloga

▲ Odvajaj $y = \sin 2x$

▷ domača naloga

2.4 Uporaba odvoda pri računanju kotov

Kot φ, pod katerim premica $y = k \cdot x + n$ seka os x izračunamo iz formule $\operatorname{tg}\varphi$ = k.

Če krivulja $f(x)$ seka os x v točki x_0, potem je kot φ med to krivuljo in osjo x enak kotu med tangento na to krivuljo v točki x_0 in osjo x.

Izpeljemo lahko naslednji izrek:

Če krivulja $f(x)$ seka os x v točki x_0, potem za kot φ med to krivuljo in osjo x velja formula $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.

Če se krivulji $f(x)$ in $g(x)$ sekata v točki x_0, potem je kot med krivuljama v tem presečišču enak kotu med tangentama na ti dve krivulji v točki x_0.

Naloge:

▲ Pod kakšnim kotom seka os x parabola $y = 2x^2 + x - 10$?

▷ Najprej izračunamo točke, v katerih parabola seka os x. Najdemo 2 taki točki:

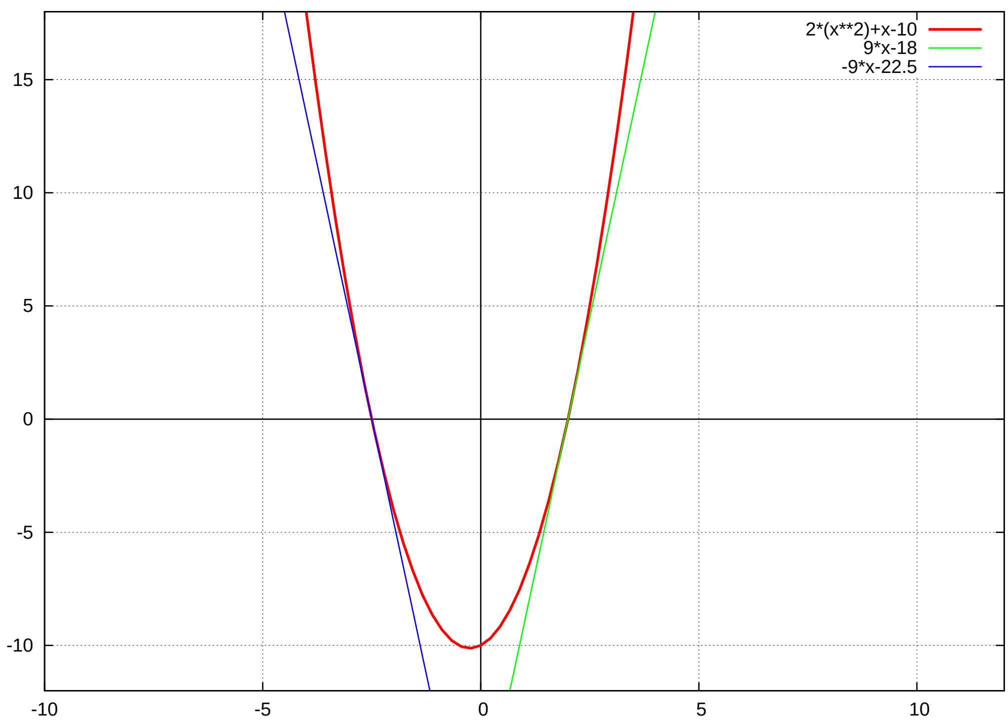
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -2,5$

$y' = 4x + 1 \qquad y'(x_1) = 9$, $y'(x_2) = -9$

$\operatorname{tg}\varphi_1 = 9 \qquad \varphi_1 = 83,66^\circ = 83^\circ 39' 35''$

$\operatorname{tg}\varphi_2 = -9 \qquad \varphi_2 = -83,66^\circ = 96,34^\circ = 96^\circ 20' 25''$



▲ Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y_1 = x^2$ in $y_2 = x^4$?

▷ Dani krivulji se sekata v točki $x = 1$.

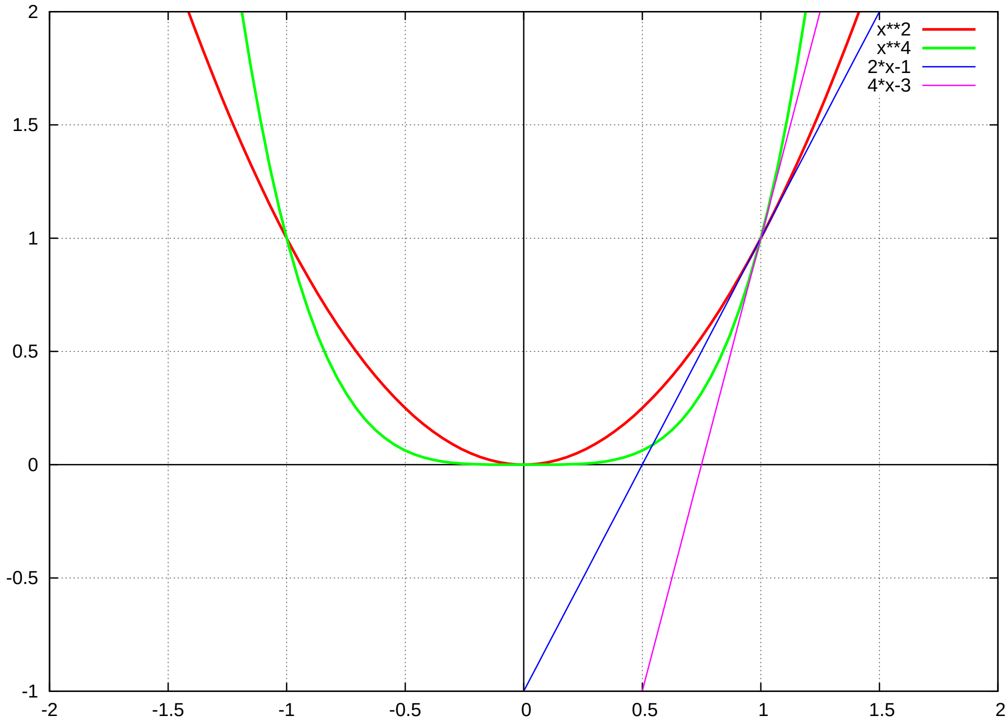
$y_1' = 2x$

$y_2' = 4x^3$

$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = 2 \qquad \varphi_1 = 63,43°$

$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = 4 \qquad \varphi_2 = 75,96°$

$\varphi_2 - \varphi_1 = 12,53°$



2.5 Uporaba odvoda pri računanju približkov

Če v definicijo odvoda namesto spremenljivke x vstavimo neko določeno točko x_0 dobimo naslednjo formulo:

$$f(x_0 + \mathrm{dx}) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \mathrm{dx}$$

Formula je pravilna le, če je dx neskončno majhen. Če temu ni tako, dobimo naslednjo formulo, ki ni enakost a je kljub temu uporabna:

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \triangle x$$

Naloge:

▲ Izračunaj $\sqrt[6]{65}$

▷ Za funkcijo $f(x) = \sqrt[6]{x}$ poznamo natančno vrednost v točki $x_0 = 64$ in sicer $\sqrt[6]{64} = 2$.

$$f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^5}$$

$$f(65) = f(64+1) \qquad x_0 = 64, \triangle x = 1$$

$$f(64+1) \approx f(64) + f'(64) \cdot 1 = 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{32} \cdot 1 = 2,0052$$

Točna vrednost: $\sqrt[6]{65} = 2,00517$

▲ Določi približek za $\sqrt{a^2+k}$, kjer je k precej manjše število od a

▷ Vzamemo $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = a^2$ in $\triangle x = k$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \triangle x$$

$$\sqrt{a^2+k} \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} \cdot k = a + \frac{k}{2a}$$

Primer uporabe: $\sqrt{16,08} \approx 4 + \frac{0,08}{8} = 4,01$

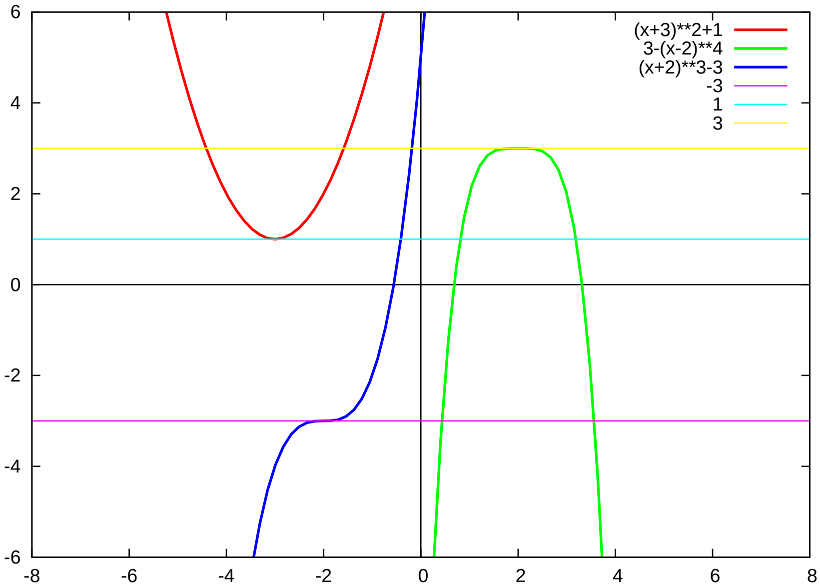
Točna vrednost: $\sqrt{16,08} = 4,00999$

2.6 Uporaba odvoda pri risanju funkcij

Če poznamo eno točko na funkciji in odvod funkcije v vseh točkah, lahko to funkcijo v celoti narišemo z izbrano natančnostjo. Odvod pa lahko uporabimo pri risanju funkcij tudi na druge načine.

Če je odvod funkcije v neki točli enak nič, potem je tangenta v tej točki vodoravna. Takšne točke imenujemo **stacionarne točke** in jih delimo na:

- minimum
- maksimum in
- prevoj.



Naj bo x_0 stacionarna točka funkcije $y = f(x)$. Potem velja:

- $y'(x_0) = 0$
- če je x_0 minimum, potem velja $y''(x_0) > 0$
- če je x_0 maksimum, potem velja $y''(x_0) < 0$
- če je x_0 prevoj, potem velja $y''(x_0) = 0$

Pri sklepanju v obratni smeri moramo biti nekoliko previdni.

- če velja $y''(x_0) > 0$, potem je x_0 minimum
- če velja $y''(x_0) < 0$, potem je x_0 maksimum
- če velja $y''(x_0) = 0$, potem ni nujno, da je x_0 prevoj, lahko je tudi minimum ali pa maksimum!

Naloge:

▲ $y = 16x^4 - 8x^3 = 8x^3 \cdot (2x - 1)$

▷ $y' = 64x^3 - 24x^2$

$y'' = 192x^2 - 48x$

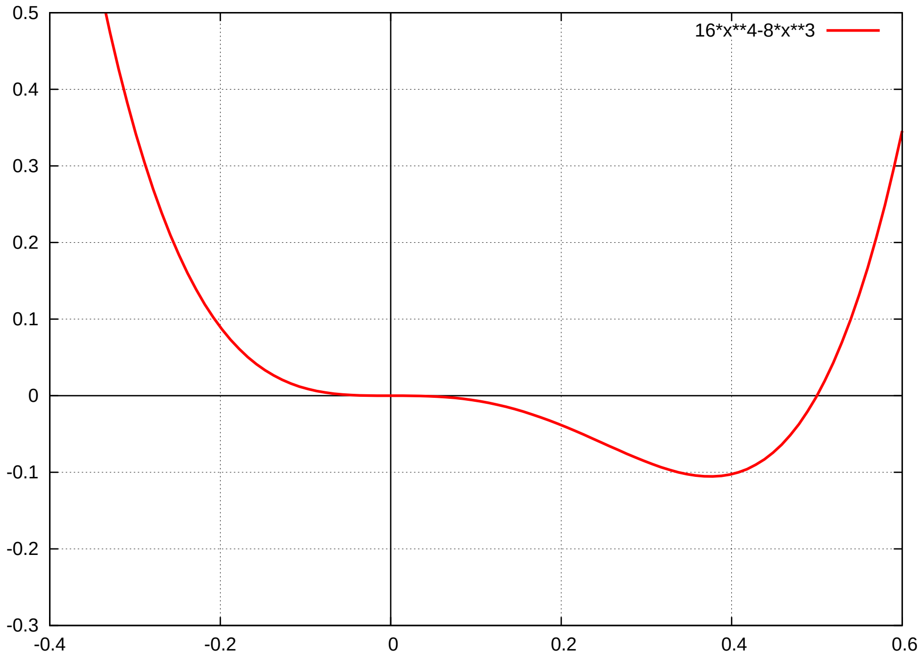
Najprej poiščemo stacionarne točke.

$y' = 8x^2(8x - 3) = 0$

Stacionarni točki sta $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ in $x_2 = \frac{3}{8}$, $y_2 \approx -0,1$.

$y''(x_1) = 0$ z drugim odvodom ne moremo zanesljivo določiti tipa točke x_0

$y''(x_2) = 9$ točka x_2 je minimum

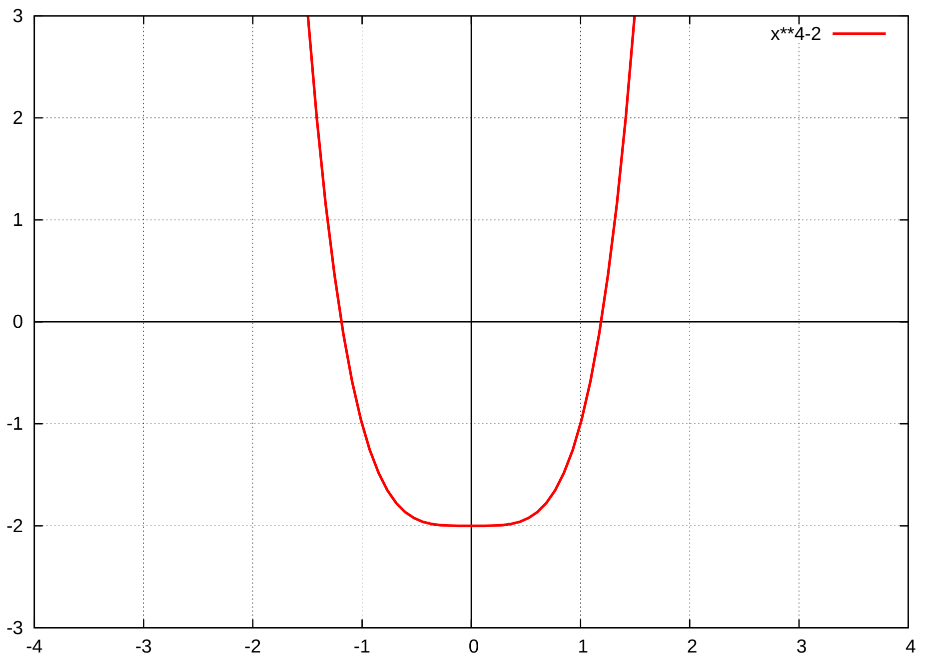


▲ $y = x^4 - 2$

▷ $y' = 4x^3$ edina stacionarna točka je $x_0 = 0$

$y'' = 12x^2$

Velja $y''(x_0) = 0$, vendar pa v točki x_0 ni prevoj ampak minimum.



Natančno pravilo za določanje tipa stacionarne točke je naslednje. Zaporedoma izračunamo vrednosti drugega, tretjega, četrtega itd. odvoda v stacionarni točki, dokler ni rezultat različen od nič. Če je rezultat prvič različen od nič pri odvodu sode stopnje, potem je v točki minimum (rezultat je pozitiven) oz. maksimum (rezultat je negativen). Če je rezultat prvič različen od nič pri odvodu lihe stopnje, potem je v tej točki prevoj.

Naloge:

▲ $y = 16x^4 - 8x^3 = 8x^3 \cdot (2x - 1)$

▷ $y' = 64x^3 - 24x^2$

Zanima nas tip stacionarne točke $x_1 = 0$, $y_1 = 0$

$y'' = 192x^2 - 48x \qquad y''(0) = 0$

$y''' = 384x - 48 \qquad y'''(0) = -48$

V tej točki je prevoj (glej sliko na prejšnji strani).

▲ $y = x^4 - 2$

▷ $y' = 4x^3$

Zanima nas tip stacionarne točke $x_1 = 0$, $y_1 = -2$

$y'' = 12x^2 \qquad y''(0) = 0$

$y''' = 24x \qquad y'''(0) = 0$

$y'''' = 24 \qquad y''''(0) = 24$

V tej točki je minimum (glej sliko na prejšnji strani).

Če za vrednosti funkcije na nekem intervalu velja, da od leve na desno naraščajo, potem je ta funkcija na tem intervalu **naraščajoča**.

Če za vrednosti funkcije na nekem intervalu velja, da od leve na desno padajo, potem je ta funkcija na tem intervalu **naraščajoča**.

Pri določanju, ali funkcija v okolici neke točke narašča ali pada, si lahko pomagamo s prvim odvodom.

- če velja $y'(x_0) > 0$, potem funkcija v okolici točke x_0 narašča
- če velja $y'(x_0) < 0$, potem funkcija v okolici točke x_0 narašča
- če velja $y'(x_0) = 0$, potem funkcija v okolici točke x_0 ali pada ali narašča ali pa se spremeni iz padajoče v naraščajočo oz. obratno.

Točke, v katerih se funkcija spremeni iz padajoče v naraščajočo sovpadajo z minimumi te funkcije. Točke, v katerih se funkcija spremeni iz naraščajoče v padajočo sovpadajo z maksimumi te funkcije.

Če leži funkcija na nekem intervalu nad tangentami v vseh točkah tega intervala, potem je ta funkcija na tem intervalu **konveksna**.

Če leži funkcija na nekem intervalu pod tangentami v vseh točkah tega intervala, potem je ta funkcija na tem intervalu **konkavna**.

Pri določanju, ali je funkcija v okolici neke konveksna ali konkavna, si lahko pomagamo s drugim odvodom.

- če velja $y''(x_0) > 0$, potem je funkcija v okolici točke x_0 konveksna
- če velja $y''(x_0) < 0$, potem je funkcija v okolici točke x_0 konkavna
- če velja $y''(x_0) = 0$, potem je funkcija v okolici točke x_0 ali konveksna ali konkavna ali pa se spremeni iz konveksne v konkavno oz. obratno.

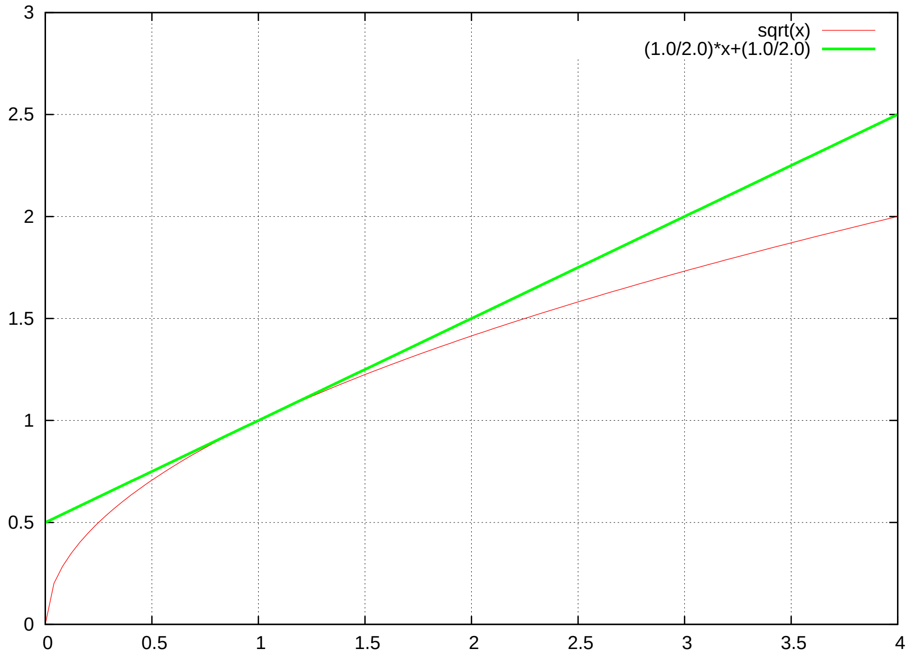
Naloga:

▲ $y = \sqrt{x}$

▷ $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Za vsak $x > 0$ velja $y''(x) < 0$, torej je funkcija konkavna.



2.7 Uporaba odvoda v fiziki

Odvod je pogosto uporabljena operacija v fiziki.

Tukaj je primer iz poglavja o gibanju teles. Tam velja, da če je $s = f(t)$ funkcija poti po času, potem je $\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$ funkcija hitrosti po času in $\frac{d^{2s}}{\mathrm{dt}^2}$ je funkcija pospeška po času.

Na primer, pri navpičnem metu je pot podana s funkcijo $s = v_0 \cdot t - \frac{\mathrm{gt}^2}{2}$, kjer je v_0 začetna hitrost in g zemeljski pospešek.

Kako se spreminja hitrost?

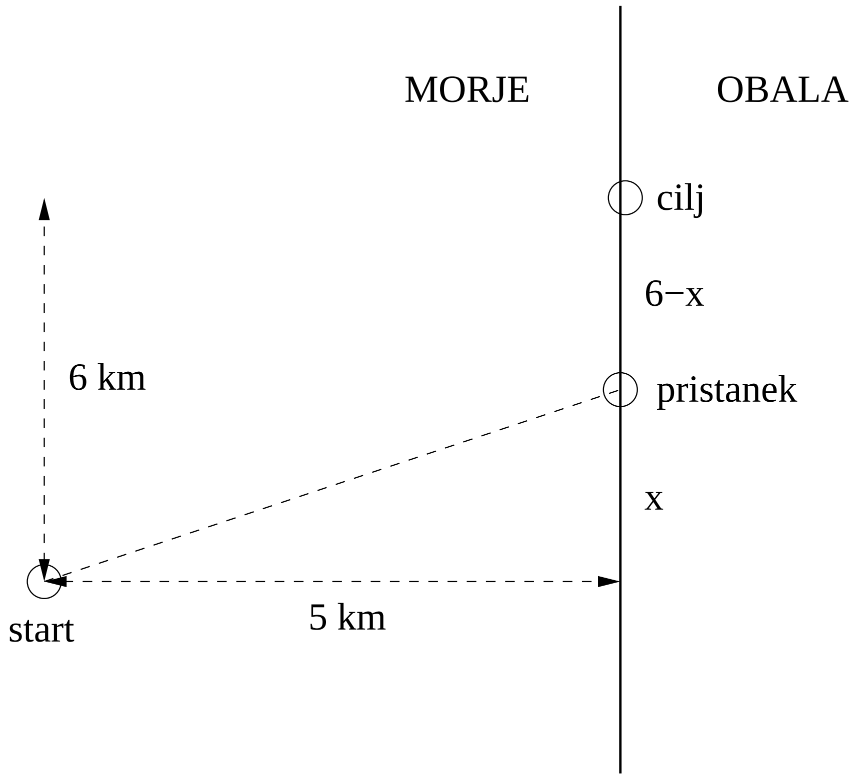
$$v = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = v_0 - \frac{2\,\mathrm{gt}}{2} = v_0 - \mathrm{gt}$$

Kako se spreminja pospešek?

$$a = \frac{d^2 s}{\mathrm{dt}^2} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -g \qquad \text{(pri navpičnem metu imamo ves čas konstanten pojemek)}$$

Naloga:

▲ Mož s prtljago je v čolnu 5 km od obale in bi rad dosegel točko, ki je 6 km po obali navzgor. Mož lahko vesla s hitrostjo 2 km/h, hodi pa s hitrostjo 4 km/h. Kje naj pristane, da bo najhitreje dosegel cilj?



▷ $v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v}$

$$t_{\text{skupaj}} = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{2} + \frac{6 - x}{4}$$

$$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{25 + x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{25 + x^2}}{4\sqrt{25 + x^2}}$$

Zanima nas, kdaj je $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 0$

$$2x - \sqrt{25 + x^2} = 0$$

$$4x^2 = 25 + x^2$$

$$3x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2,89\,\mathrm{km}$$

POGLAVJE 3

NEDOLOČENI INTEGRALI

Matematični priročnik, str. 315-321, tabela nedoločenih integralov je na str. 856-892

3.1 Definicija in notacija

Nedoločeni integral $\int f(x) \cdot \mathrm{dx}$ je vsaka funkcija, ki ima za odvod funkcijo $f(x)$.
$F(x) = \int f(x) \cdot \mathrm{dx}$
Odvod katerekoli funkcije $F(x)$ je enak odvodu $F(x) + c$.
$\int f(x) \, \mathrm{dx} = F(x) + c$

3.2 Integrali elementarnih funkcij

1. $\int x^a \cdot \mathrm{dx} = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad a \neq -1$

   $\int x^{-1} \cdot \mathrm{dx} = \ln x + c$

2. $\int a^x \cdot \mathrm{dx} = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \qquad a > 0, a \neq 1$

3. $\int \log_a x \cdot \mathrm{dx} = x \cdot \log_a x - \dfrac{x}{\ln a} + c \qquad a > 0, a \neq 1$

4. $\int \sin x \cdot \mathrm{dx} = -\cos x + c$

5. $\int \cos x \cdot \mathrm{dx} = \sin x + c$

Naloge:

▲ $\int \sqrt{x} \cdot \mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{dx} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

▲ $\int \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln \mathrm{e}} + c = \mathrm{e}^x + c$

3.3 Pravila za integriranje

1. $\int a \cdot f(x) \cdot \mathrm{dx} = a \cdot \int f(x) \cdot \mathrm{dx}$
2. $\int f(x) \pm g(x) \cdot \mathrm{dx} = \int f(x) \cdot \mathrm{dx} + \int g(x) \cdot \mathrm{dx}$

Naloge:

▲ $\int (\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}) \cdot \mathrm{dx} = \int \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} + \int \dfrac{1}{x^2} \cdot \mathrm{dx} = \ln x + c_1 + \dfrac{x^{-1}}{-1} + c_2 = \ln x - \dfrac{1}{x} + c$

▲ $\int \dfrac{\mathrm{dx}}{x \cdot \ln a} = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \int \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} = \dfrac{1}{\ln a} \cdot (\ln x + c_1) = \dfrac{\ln x}{\ln a} + \dfrac{c_1}{\ln a} = \log_a x + c$

▲ $\int x \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{dx} = ??$

▷ domača naloga

▲ $\int (x+1)^2 \cdot \mathrm{dx} = ??$

▷ domača naloga

3.4 Metoda substitucije

Če velja $t = g(x)$ potem velja: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \mathrm{dx} = \int f(t) \cdot \mathrm{dt}$.

Dokaz poteka tako, da računamo z diferenciali:

$t = g(x) \Longrightarrow \mathrm{dt} = g'(x) \cdot \mathrm{dx}$

Sedaj izrazimo $\mathrm{dx} = \dfrac{\mathrm{dt}}{g'(x)}$ in vstavimo:

$f(g(x)) \cdot \mathrm{dx} = f(t) \cdot \dfrac{\mathrm{dt}}{g'(x)}$

$f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \mathrm{dx} = f(t) \cdot \mathrm{dt}$

Če sta enaka diferenciala, potem sta enaka tudi integrala!

Naloge:

▲ $\int \sqrt{1+x}\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = 1+x \\ \mathrm{dt} = t'\cdot \mathrm{dx} = 1\cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\cdot \mathrm{dt} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c$

▲ $\int \sqrt{1+2x}\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = 1+2x \\ \mathrm{dt} = t'\cdot \mathrm{dx} = 2\cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\cdot \frac{1}{2}\cdot \mathrm{dt} =$

$= \frac{1}{2}\cdot \int \sqrt{t}\cdot \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3} + c$

▲ $\int \frac{x-1}{x+1}\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = x+1 \\ x = t-1 \\ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \frac{t-1-1}{t}\cdot \mathrm{dt} = \int \frac{t-2}{t}\cdot \mathrm{dt} = \int (1-\frac{2}{t})\cdot \mathrm{dt} =$

$= \int 1\cdot \mathrm{dt} - 2\int \frac{1}{t}\cdot \mathrm{dt} = t - 2\cdot \ln t + c = x + 1 - 2\cdot \ln(x+1) + c$

▲ $\int \frac{x}{x^2-1}\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = x^2-1 \\ \mathrm{dt} = 2x\cdot \mathrm{dx} \\ x\cdot \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \frac{1}{x^2-1}\cdot x\cdot \mathrm{dx} = \int \frac{1}{t}\cdot \frac{1}{2}\cdot \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\cdot \mathrm{dt} =$

$= \frac{1}{2}\cdot \ln t + c = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-1)$

▲ $\int \frac{\mathrm{dx}}{x\cdot \sqrt{1-x}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = 1-x \\ x = 1-t^2 \\ \mathrm{dx} = -2t\cdot \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \frac{-2t\cdot \mathrm{dt}}{(1-t^2)\cdot t} = -\int \frac{2}{1-t^2}\cdot \mathrm{dt} =$

$= -\int (\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})\cdot \mathrm{dt} = \int \frac{\mathrm{dt}}{1-t} - \int \frac{\mathrm{dt}}{1+t} = \left| \begin{array}{l} p = 1-t, q = 1+t \\ t = 1-p, t = q-1 \\ \mathrm{dt} = -\mathrm{dp}, \mathrm{dt} = \mathrm{dq} \end{array} \right| =$

$= \int \frac{\mathrm{du}}{u} - \int \frac{\mathrm{dv}}{v} = \ln u - \ln v + c = \ln(1-t) - \ln(1+t) + c = \ln(\frac{1-t}{1+t}) + c =$

$= \ln(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}) + c$

▲ $\int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ \mathrm{dt} = -\sin x\cdot \mathrm{dx} \\ \sin x\cdot \mathrm{dx} = -\mathrm{dt} \end{array} \right| = -\int \frac{1}{t}\cdot \mathrm{dt} = -\ln t + c = -\ln(\cos x) + c$

▲ $\int \sin x\cdot \cos x\cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ \mathrm{dt} = \cos x\cdot \mathrm{dx} \end{array} \right| = \int t\cdot \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\cdot t^2 + c = \frac{1}{2}\cdot \sin^2 x + c$

3.5 Integriranje racionalnih funkcij

Pri integriranju racionalnih funkcij uporabimo metodo substitucije. Še preden pa začnemo integrirati, racionalno funkcijo preoblikujemo po metodi nedoločenih koeficientov.

Postopek za izračun integrala $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ je naslednji:

1. Če polinom v števcu ni manjše stopnje kot polinom v imenovalcu, potem delimo polinoma. Integral rezultata je integral polinoma in ga izračunamo posebej.

2. Ostanek razstavimo na vsoto parcialnih ulomkov:
   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{r_n}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_mx+c_m)^{s_n}}$$
   Za razstavljanje uporabimo metodo nedoločenih koeficientov.
   Iz vsakega $(x-a)^r$ dobimo: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-a)^r}$
   Iz vsakega $(x^2+\mathrm{bx}+c)^s$ dobimo: $\frac{B_1x+C_1}{x^2+\mathrm{bx}+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\mathrm{bx}+c)^2}+\ldots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\mathrm{bx}+c)^s}$

3. Za integriranje parcialnih ulomkov uporabimo naslednje formule:
   $$\int \frac{A}{x\pm a}\cdot \mathrm{dx} = A\cdot\int\frac{\mathrm{dx}}{x\pm a} = A\cdot\ln(x\pm a)+c$$
   $$\int \frac{A}{(x-a)^2}\cdot \mathrm{dx} = A\cdot\int\frac{\mathrm{dx}}{(x-a)^2} = -A\cdot\frac{1}{x-a}+c$$
   $$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+c^2}\cdot \mathrm{dx} = \frac{1}{c}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{c}+c$$
   $$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+c^2)^2}\cdot \mathrm{dx} = \frac{1}{2\cdot c^2}\cdot(\frac{x}{x^2+c^2}+\int\frac{\mathrm{dx}}{x^2+c^2})$$
   Druge formule najdemo v matematičnem priročniku.

Naloge:

▲ $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-5x-6} = \int\frac{\mathrm{dx}}{(x-6)(x+1)}$

▷ Zapišemo: $\frac{1}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+1}$

Dobimo: $\frac{1}{x^2-5x-6} = \frac{1}{7(x-6)}-\frac{1}{7(x+1)}$

S pomočjo dobljenega rezultata preoblikujemo integral. Nato uporabimo formule za integriranje parcialnih ulomkov.

$$\int\frac{\mathrm{dx}}{x^2-5x-6} = \frac{1}{7}\int\frac{\mathrm{dx}}{x-6}-\frac{1}{7}\int\frac{\mathrm{dx}}{x+1} = \frac{1}{7}\cdot\ln(x-6)-\frac{1}{7}\cdot\ln(x+1)+c =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\ln(\frac{x-6}{x+1})+c$$

▲ $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} \cdot \mathrm{dx} = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)^2} \cdot \mathrm{dx}$

▷ Zapišemo: $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

Dobimo: $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2}$

S pomočjo dobljenega rezultata preoblikujemo integral. Nato uporabimo formule za integriranje parcialnih ulomkov.

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} \cdot \mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dx}}{2(x+1)} - \frac{\mathrm{dx}}{2(x-1)} + \frac{4 \cdot \mathrm{dx}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)} + 4\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x-1) + 4 \cdot (-\frac{1}{x-1}) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{x+1}{x-1}) - \frac{4}{x-1} + c$$

▲ $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} \cdot \mathrm{dx} = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} \cdot \mathrm{dx} =??$

▷ domača naloga

▲ $\int \frac{2x \cdot \mathrm{dx}}{(1+x)(1+x^2)^2} =??$

▷ domača naloga

POGLAVJE 4

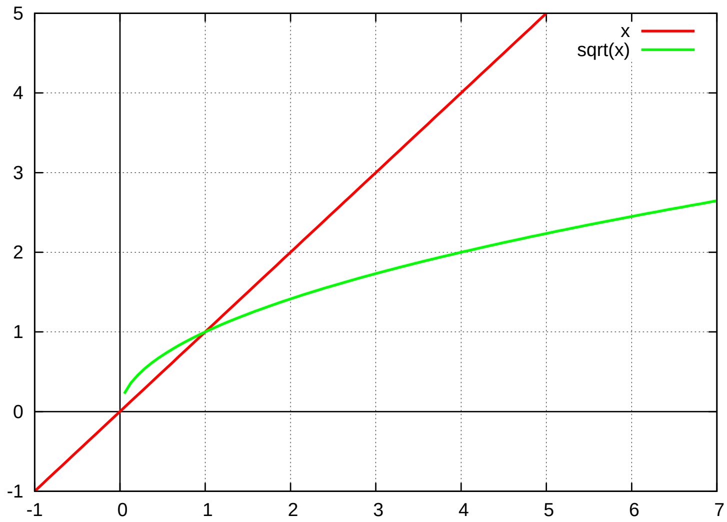
DOLOČENI INTEGRALI

Matematični priročnik, str. 326-332 in 337-341

4.1 Definicija in notacija

Imejmo krivuljo f(x). Zanima nas ploščina pod to krivuljo na intervalu od 0 do x. Oglejmo si na primer tabelo ter graf za funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt{x}$.

x	približna ploščina za f(x) od 0 do x	približna ploščina za $g(x)$od 0 do x
0	0	0
1	0,5	0,5
2	2	1,41
4	8	4
a	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a \cdot \sqrt{a}}{2}$



Ker je krivulja funkcije $g(x) = \sqrt{x}$ ukrivljena, so navedene vrednosti premajhne. Iz slike lahko razberemo, da so premajhne. Zanima nas, kako bi izračunali točne vrednosti.

Zanima nas ploščina S, ki je ploščina pod krivuljo od točke x_0 do točke $x_0 + \triangle x$. Označimo ploščino s F(x).

Če je x_1 točka, ki je nekje med točko x_0 in točko $x_0 + \triangle x$, potem lahko zapišemo:

ploščina S = $F(x_0 + \triangle x) - F(x_0) = f(x_1) \cdot \triangle x$

Iz tega izraza dobimo:

$$f(x_1) = \frac{F(x_0 + \triangle x) - F(x_0)}{\triangle x}$$

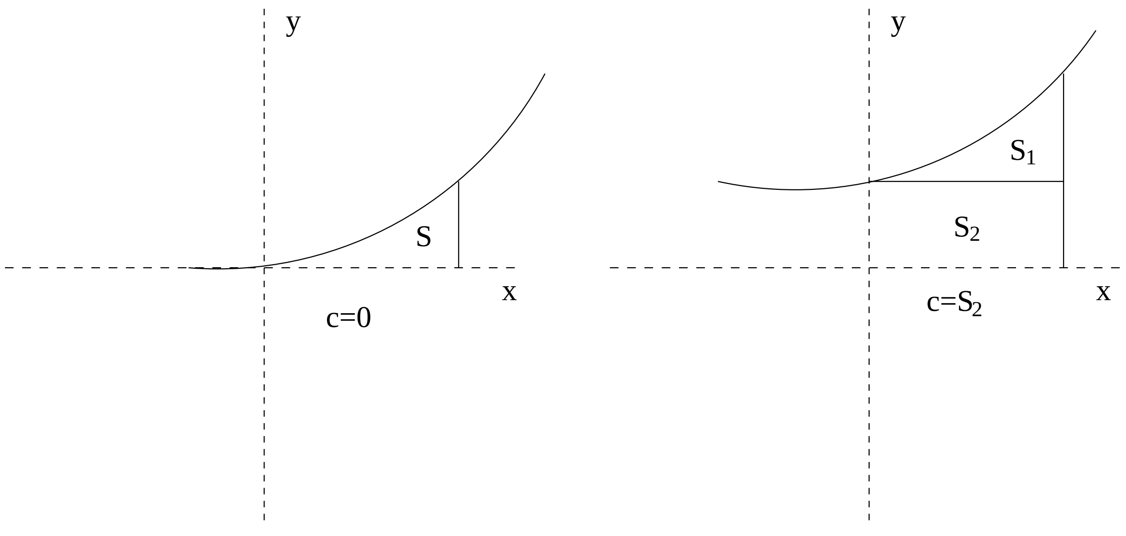
Če je $\triangle x$ zelo majhen, potem je x_1 zelo blizu x_0, torej dobimo:

$$f(x_0) = \frac{F(x_0 + \mathrm{dx}) - F(x_0)}{\mathrm{dx}}$$

$$f(x_0) = F'(x_0)$$

$$F(x_0) = \int f(x_0) \cdot \mathrm{dx}$$

Konstanto, ki se pojavi v rezultatu nedoločenega integriranja, je potrebno ustrezno prilagoditi.



Lastnosti:

1. Če je funkcija pod osjo x, potem kot rezultat dobimo negativno število, katerega absolutna vrednost je iskana ploščina.

2. Če je funkcija deloma nad, deloma pa pod osjo x, potem kot rezultat dobimo razliko med ploščino nad osjo x in ploščino pod osjo x.

4.2 Newton-Leibnitzova formula

Označimo z $\int_A^B f(x) \cdot \mathrm{dx}$ ploščino pod krivuljo med točkama A in B. Potem velja:

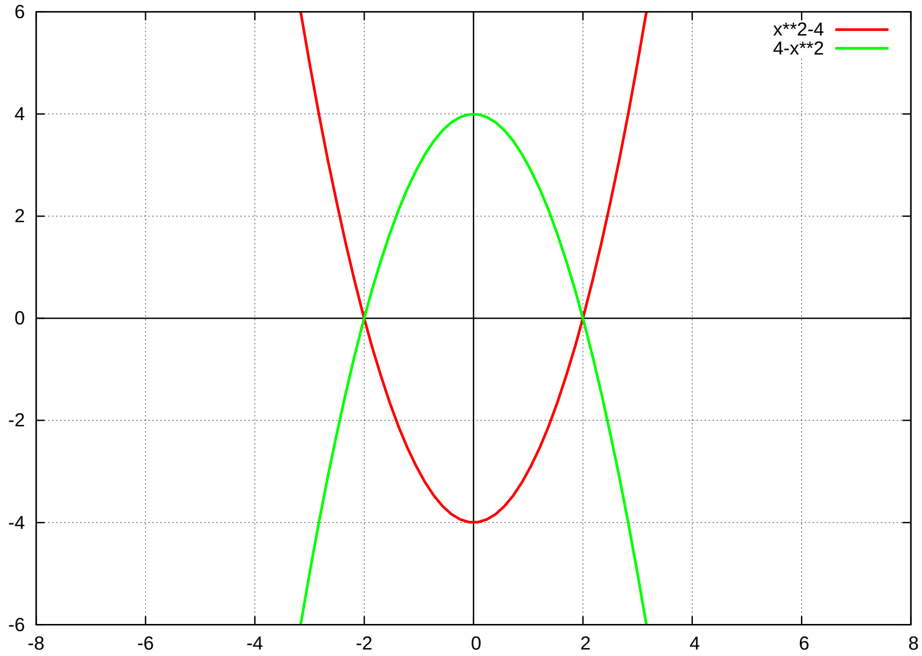
$$\int_A^B f(x) \cdot \mathrm{dx} = F(B) - F(A) = F(X)\Big|_A^B$$

Zapis $\int_A^B f(x) \cdot \mathrm{dx}$ imenujemo **določeni integral**.

Newton-Leibnitzova formula velja le, če je $f(x)$ zvezna na intervalu od A do B.

Naloge:

- $\int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{dx} = (\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$
- $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \mathrm{dx} = (\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1^3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{0^3} = \frac{2}{3}$
- $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} = (\ln x)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0,69315$
- $\int_0^\pi \sin x \cdot \mathrm{dx} = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$
- Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata funkciji $f = x^2 - 4$ in $g = 4 - x^2$.



▷ Funkciji $f(x)$ in $g(x)$ se sekata v točkah -2 in $+2$. Na celotnem intervalu od -2 do $+2$ so vrednosti funkcije $g(x)$ večje od vrednosti funkcije $f(x)$.

$$\int\limits_{-2}^{2}(g(x)-f(x))\cdot \mathrm{dx}=\int\limits_{-2}^{2}((4-x^2)-(x^2-4))\cdot \mathrm{dx}=\int\limits_{-2}^{2}(8-2x^2)\cdot \mathrm{dx}=$$

$$=(8x-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{-2}^{+2}=(8\cdot 2-\frac{2}{3}\cdot 2^3)-(8\cdot(-2)-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3)=$$

$$=(16-\frac{16}{3})-(-16+\frac{16}{3})=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}=21,33333$$

4.3 Posplošeni integrali

Posplošeni integral je določeni integral, pri katerem:

1. je vsaj ena od mej v neskončnosti ali
2. gre funkcija na danem intervalu v neskončnost.

Posplošene integrale, ki imajo meje v neskončnosti, prevedemo na razreševanje limit po naslednjem vzorcu:

$$\int\limits_{A}^{B}f(x)\cdot \mathrm{dx}=\lim_{\substack{A\to a\\ B\to b}}\int\limits_{a}^{b}f(x)\cdot \mathrm{dx}$$

Posplošene integrale. pri katerih gre funkcija v točki C, ki je na intervalu od A do B, v neskončnost, prevedemo na razreševanje limit po naslednjem vzorcu:

$$\int\limits_{A}^{B}f(x)\cdot \mathrm{dx}=\lim_{c\to C-}\int\limits_{A}^{c}f(x)\cdot \mathrm{dx}+\lim_{c\to C+}\int\limits_{c}^{B}f(x)\cdot \mathrm{dx}$$

Če kot rezultat posplošenega integrala dobimo ∞, potem ta integral ne obstaja in ga imenujemo **divergenten integral**. Posplošeni integral, ki obstaja, imenujemo **konvergenten integral**.

POGLAVJE 5

LIMITE

Matematični priročnik, str. 37-41

5.1 Definicija in notacija

Zapis $x \to a$ pomeni, da se x približuje vrednosti a. Če je to pomembno, potem to približevanje zapišemo še bolj natančno in sicer:

- $x \to a^-$ (x se približuje a z leve) in
- $x \to a^+$ (x se približuje a z desne).

Limita $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ je vrednost, kateri se približuje $f(x)$, ko se x približuje a z leve.

Limita $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ je vrednost, kateri se približuje $f(x)$, ko se x približuje a z desne.

Če velja $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = y_0$, potem lahko zapišemo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y_0$.

Če se x približuje a, $f(x)$ pa raste preko vseh mej, to zapišemo z znakom ∞.

Izraza $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ in $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, pri katerih nas zanima vrednost funkcije, ko x raste preko vseh mej, imenujemo **limita v neskončnosti**.

Nekatere osnovne limite:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, če $a > 1$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$, če $a < 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$

5.2 Pravila za računanje limit

1. Če je b konstanta, potem za vsak a $\lim\limits_{x\to a} b = b$ in tudi $\lim\limits_{x\to \pm\infty} b = b$

2. Če je $f(x)$ v točki a definirana in zvezna, potem je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

6. L'Hospitalovo pravilo:

   Če $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, potem: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

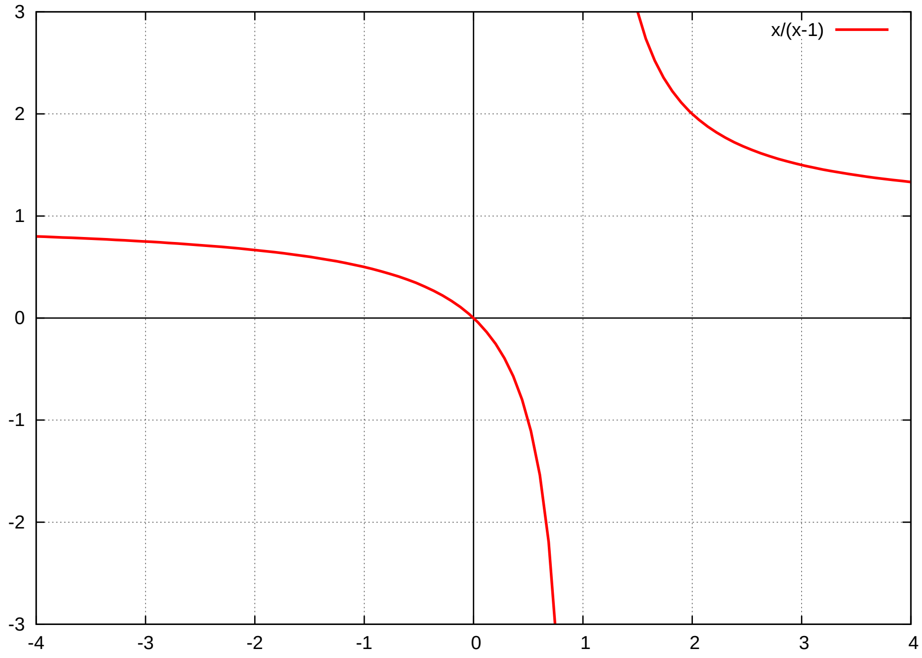
   L'Hospitalovo pravilo velja tudi, če $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

Naloge:

▲ $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$

▲ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x-1} = 0$

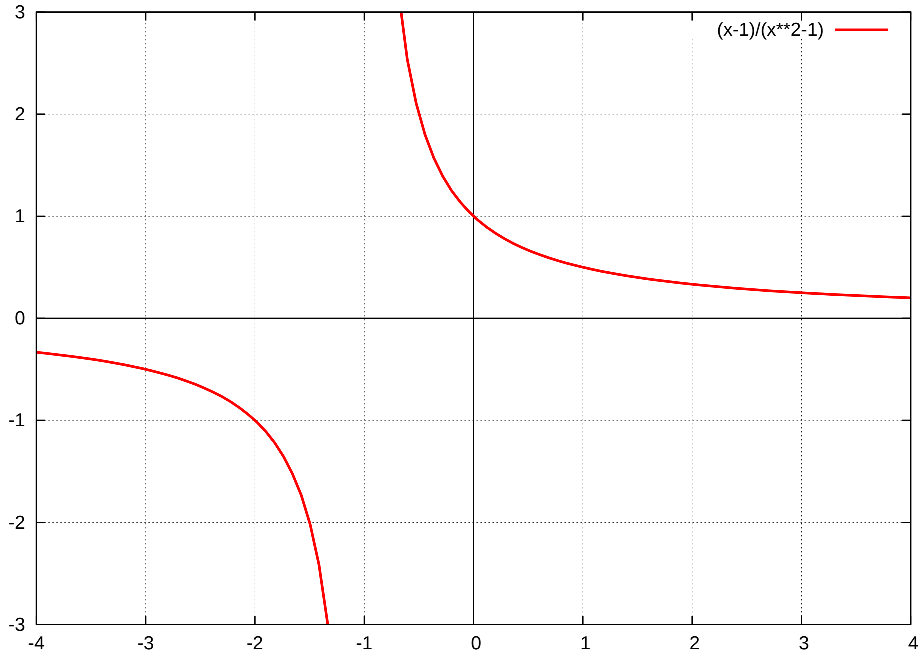
▲ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t+1}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} 1 + \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = 1 + \infty = +\infty$



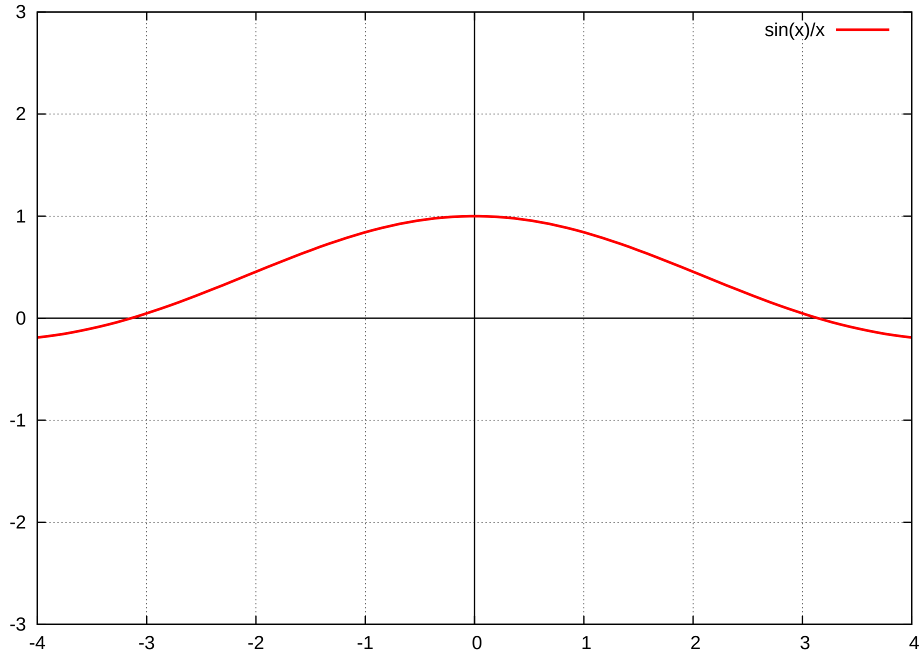
▲ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

To limito lahko rešimo tudi po L'Hospitalovem pravilu:

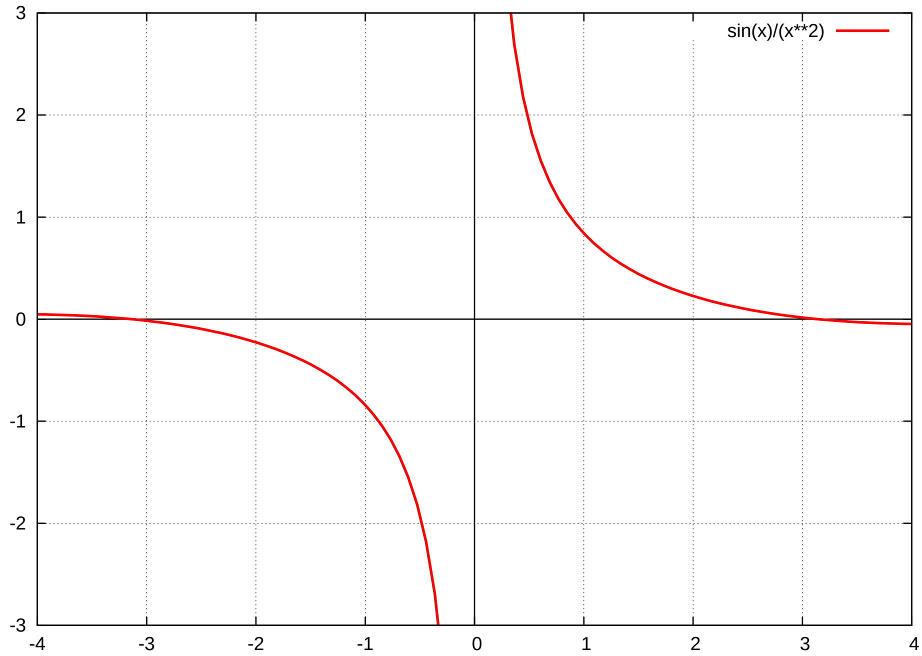
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}$



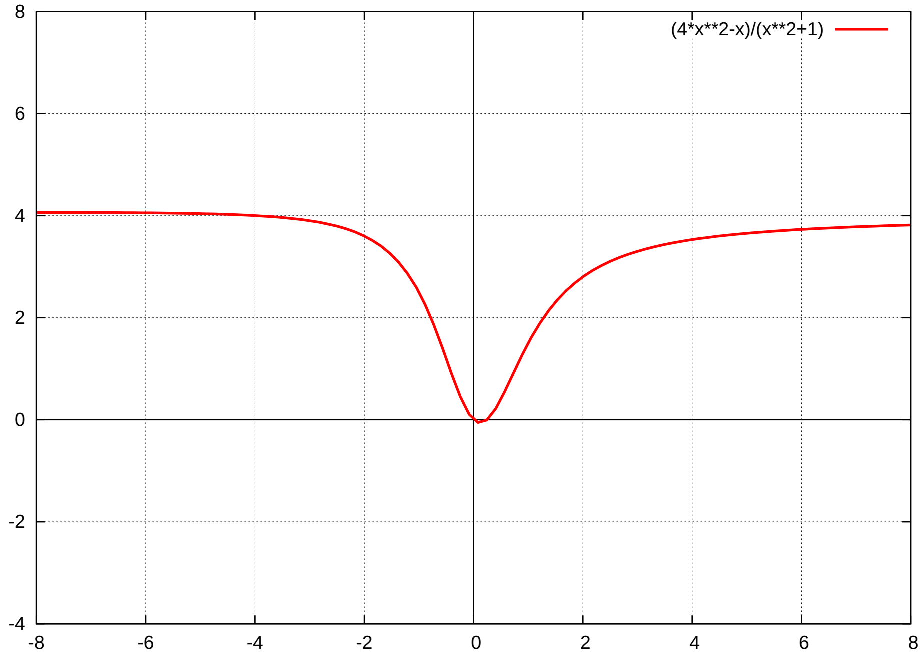
▲ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$



▲ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{2x} = \frac{1}{0} = +\infty$



▲ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2 - x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 4 = 4$



5.3 Uporaba limite za računanje odvodov

V poglavju o odvodih so bili predstavljeni odvodi elementarnih funkcij. Te odvode si matematiki niso izmislili “kar tako”, ampak so jih izračunali s pomočjo limit.

Naloga:

▲ Z uporabo limit izračunaj odvod funkcije $f(x) = x^2$

▷ $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x\to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} =$

$$= \lim\limits_{\triangle x\to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot \triangle x + \triangle x^2 - x^2}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x\to 0} (2x + \triangle x) = 2x$$

5.4 Uporaba limite za računanje posplošenih integralov

Naloge:

▲ $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_0^a \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to+\infty} (-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^a = \lim\limits_{a\to+\infty} (-\mathrm{e}^{-a} + -\mathrm{e}^{-0}) =$

$$= \lim\limits_{a\to+\infty} (1 - \frac{1}{\mathrm{e}^a}) = 1 - 0 = 1$$

▲ $\int\limits_4^\infty \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_4^a x^{-2} \cdot \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to+\infty} (-x^{-1})\Big|_4^a = \lim\limits_{a\to+\infty} (-\frac{1}{a} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

▲ Izračunaj $\int\limits_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx}$

▷ To je posplošeni integral, ker gre dana funkcija v točki 4, ki je na intervalu od 2 do 6 v neskončnost. Zato razdelimo integral v dva dela:

$$\int\limits_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx} = \lim_{a\to4^-} \int\limits_2^a \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx} + \lim_{a\to4^+} \int\limits_a^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx}$$

Ker integral ni enostaven, najprej posebej izračunamo nedoločen integral. Uporabimo metodo substitucije:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} t = 4-x \\ \mathrm{dt} = -\mathrm{dx} \\ \mathrm{dx} = -\mathrm{dt} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \cdot (-\mathrm{dt}) = -\int t^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{dt} = -3 \cdot t^{\frac{1}{3}} + c =$$

$$= -3 \cdot \sqrt[3]{4-x}$$

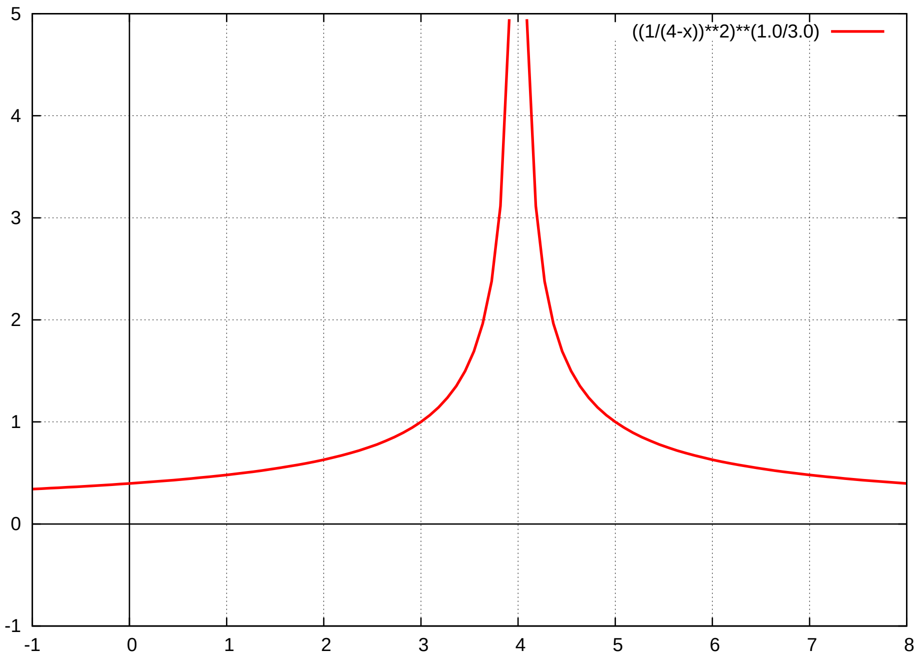
Sedaj uporabimo Netwon-Leibnitzovo formulo:

$$\lim_{a\to4^-} \int\limits_2^a \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx} + \lim_{a\to4^+} \int\limits_a^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \cdot \mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{a\to4^-} (-3 \cdot \sqrt[3]{4-x})\Big|_2^a + \lim_{a\to4^+} (-3 \cdot \sqrt[3]{4-x})\Big|_a^6 =$$

$$= \lim_{a\to4^-} ((-3 \cdot \sqrt[3]{4-a}) - (-3 \cdot \sqrt[3]{4-2})) + \lim_{a\to4^+} ((-3 \cdot \sqrt[3]{4-6}) - (-3 \cdot \sqrt[3]{4-a})) =$$

$$= (3 \cdot \sqrt[3]{2}) + (-3 \cdot \sqrt[3]{-2}) = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$$



POGLAVJE 6

TAYLORJEVA IN FOURIERJEVA VRSTA

Matematični priročnik, str. 305-306, 309-310 in tabele str. 848-855

6.1 Dotik funkcij

Pri definiciji odvoda smo zapisali:

$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_o) \cdot \triangle x$

V to formulo vstavimo $\triangle x = x - x_0$ in dobimo:

$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$

Leva in desno stran sta različni funkciji, ki pa imata v točki x_0 isto vrednost in isti prvi odvod. Pravimo, da obstaja med njimav točki x_0 **dotik prve stopnje**. Če je na levi strani funkcija $f(x)$, potem desno stran označimo z oznako $f_1(x)$.

Primer:

$f(x) = x^2$

$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) = f(x_0) + 2 \cdot x_0 \cdot (x - x_0)$

V točki $x_0 = 3$ dobimo:

$f(3) = 9$

$f'(3) = 6$

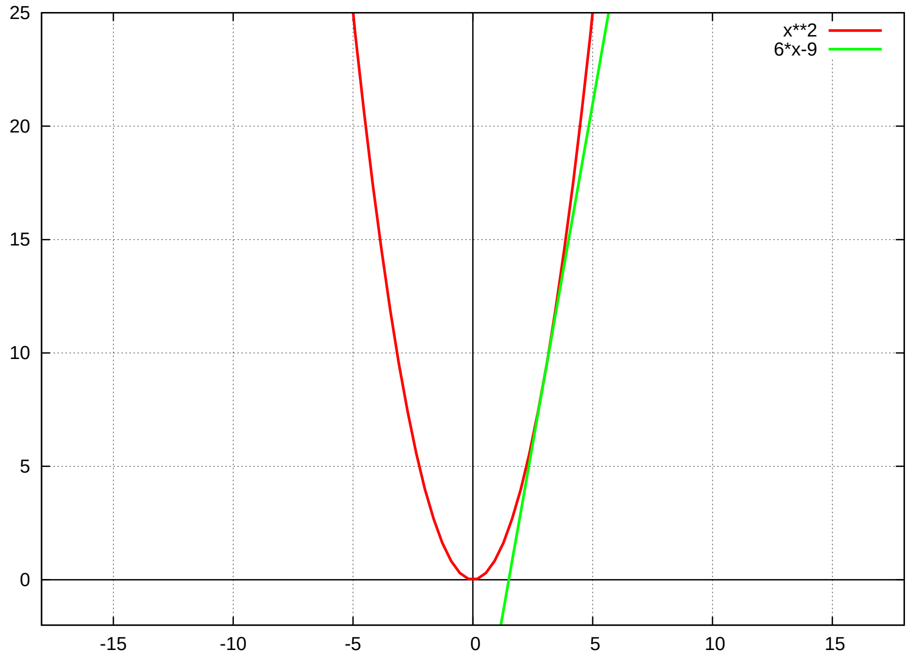
$f_1(x) = 9 + 2 \cdot 3 \cdot (X - 3) = 6x - 9$

Naredimo preizkus:

$f_1(3) = 6 \cdot 3 - 9 = 9$

$f_1'(3) = 6$

Če imata funkciji v neki točki dotik, potem sta v ozki okolici te točke podobni.



V zgornjem primeru je dobljena funkcija f_1 tangenta na funkcijo f. V splošnem velja, da imata poljubna funkcija in tangenta na njo v točki dotika dotik vsaj prve stopnje.

Če imata dve funkciji v neki točki enako vrednost, enak prvi in tudi enak drugi odvod, potem imata v tej točki **dotik druge stopnje**. Če so enaki vsi odvodi do vključno n-tega odvoda, potem imata funkciji **dotik stopnje n** . Višje stopnje je dotik, bolj podobni sta si funkciji v okolici točke dotika.

6.2 Taylorjeva vrsta

V praksi je zelo koristno, če znamo za dano funkcijo $f(x)$ poiskati polinom, ki je čimbolj podoben originalni funkciji. Polinom, ki ima s funkcijo $f(x)$ dotik prve stopnje, enostavno izračunamo po postopku predstavljenem v prejšnjem podrazdelku. Še boljši pa so polinomi, ki imajo dotike višje stopnje. Imenujemo jih Taylorjevi polinomi.

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''(x_0)$$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^1}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

Taylorjev polinom T_n ima v točki x_0 s funkcijo dotik vsaj stopnje n. Tukaj je en primer:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2\cdot 3\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f''''(x) = \frac{6\cdot 4\cdot(1+x)^3}{(1+x)^8} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

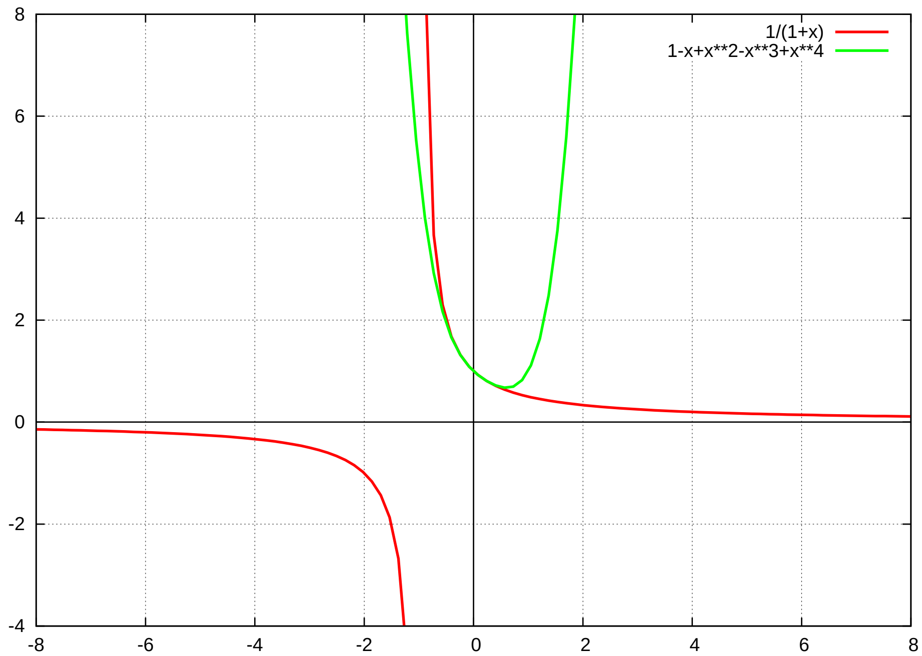
$$T_4(x) = \frac{1}{1+x_0} + \frac{x-x_0}{1!}\cdot\frac{-1}{(1+x_0)^2} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cdot\frac{2}{(1+x_0)^3} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}\cdot\frac{-6}{(1+x_0)^4} +$$

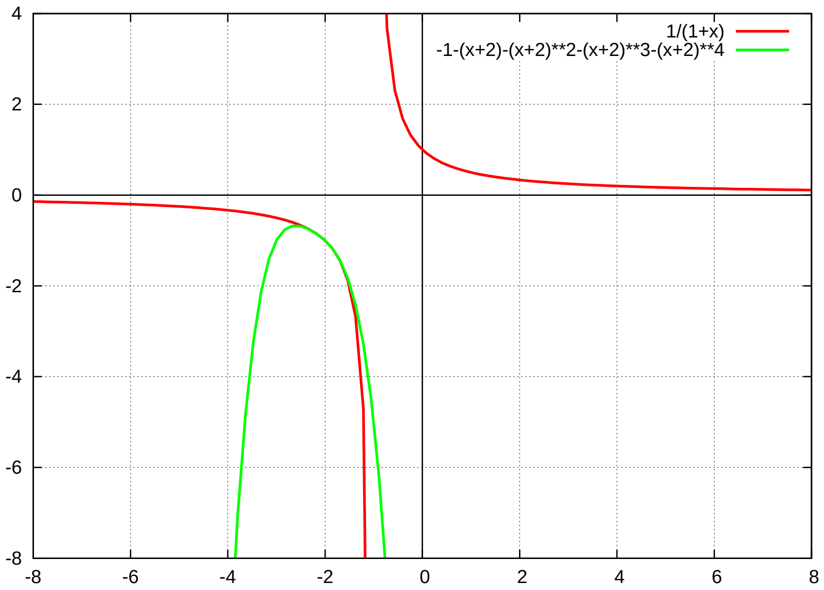
$$+\frac{(x-x_0)^4}{4!}\cdot\frac{24}{(1+x_0)^5} = \frac{1}{1+x_0} - \frac{x-x_0}{(1+x_0)^2} + \frac{(x-x_0)^2}{(1+x_0)^3} - \frac{(x-x_0)^3}{(1+x_0)^4} + \frac{(x-x_0)^4}{(1+x_0)5}$$

Izračunajmo Taylorjev polinom za funkcijo $\frac{1}{1+x}$ v točki $x_0 = 0$ in v točki $x_0 = -2$.

$T_4(0) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

$T_4(-2) = -1 - (x+2) - (x+2)^2 - (x+2)^3 - (x+2)^4$





Če število členov Taylorjevega polinoma večamo v neskončnost, dobimo **Taylorjevo vrsto**. Taylorjevo vrsto razvito okoli točke $x_0 = 0$ imenujemo **MacLaurinova vrsta**.

Naloge:

▲ Izračunaj vrednost $\sin(1)$ s pomočjo MacLaurinove vrste.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

▷ $x = 1$

$$x - \frac{x^3}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = 0,833333333$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0,841666667$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = 0,841468254$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362880} = 0,84147101$$

Natančen rezultat: $\sin 1 = 0,841470985$

▲ Izračunaj vrednost $\cos(\frac{\pi}{3})$ s pomočjo MacLaurinove vrste.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

▷ domača naloga

▲ Izračunaj vrednost e^2 s pomočjo MacLaurinove vrste.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

▷ domača naloga

6.3 Fourierjeva vrsta

Funkcija je periodična s periodo c, če velja $f(x) = f(x + k \cdot c)$, kjer je $k = \pm 1, 2, 3, \ldots$

Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ imata periodo 2π. Funkcija $\operatorname{tg} x$ ima periodo π.

Če imamo $f(x)$ in si izberemo periodo c, lahko tvorimo Fourierjevo vrsto, ki je periodična formula z izbrano periodo in se na osnovni periodi ujemo s funkcijo $f(x)$.

Formula, po kateri tvorimo Fourierjevo vrsto za funkcijo $f(x)$, je naslednja:

$\boldsymbol{F}(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos \omega x + a_2 \cdot \cos 2\omega x + a_3 \cdot \cos 3\omega x + \ldots + b_1 \cdot \sin \omega x + b_2 \cdot \sin 2\omega x + b_3 \cdot \sin 3\omega x + \ldots$

Konstanta ω, ki nastopa v formuli je enaka $\omega = \frac{2\pi}{c}$, pri čemer je c perioda, ki si jo izberemo. Če izberemo $c = 2\pi$, potem je $\omega = 1$.

Konstante a_1, a_2, ... in b_1, b_2, ..., ki nastopajo v formuli, so določeni integrali, ki jih izračunamo po naslednjih formulah, v katerih sta ω in c enaka kot v osnovni formuli:

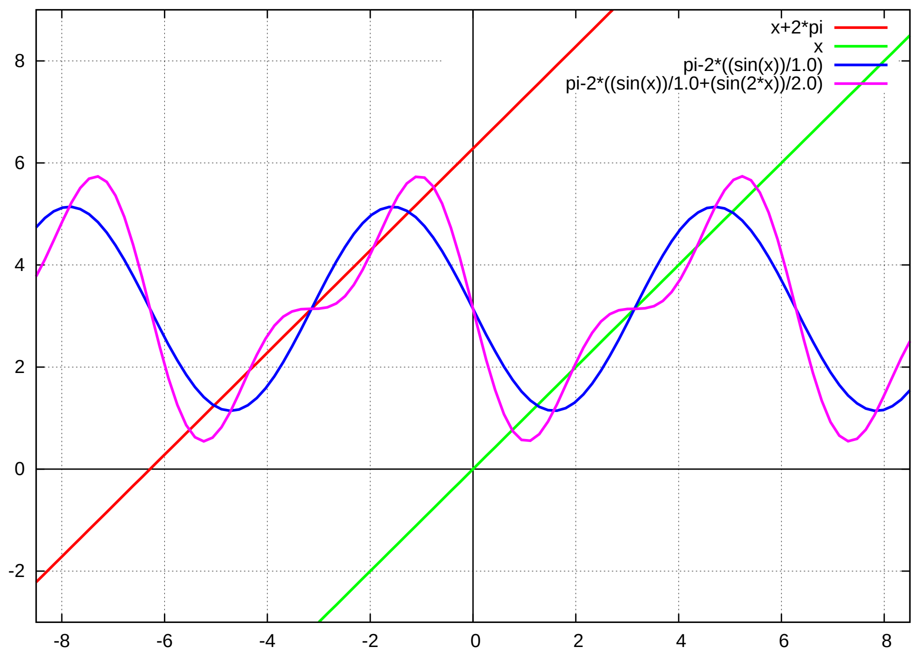
$$a_k = \frac{2}{c} \cdot \int_0^c f(x) \cdot \cos k\omega x \cdot \mathrm{dx}$$

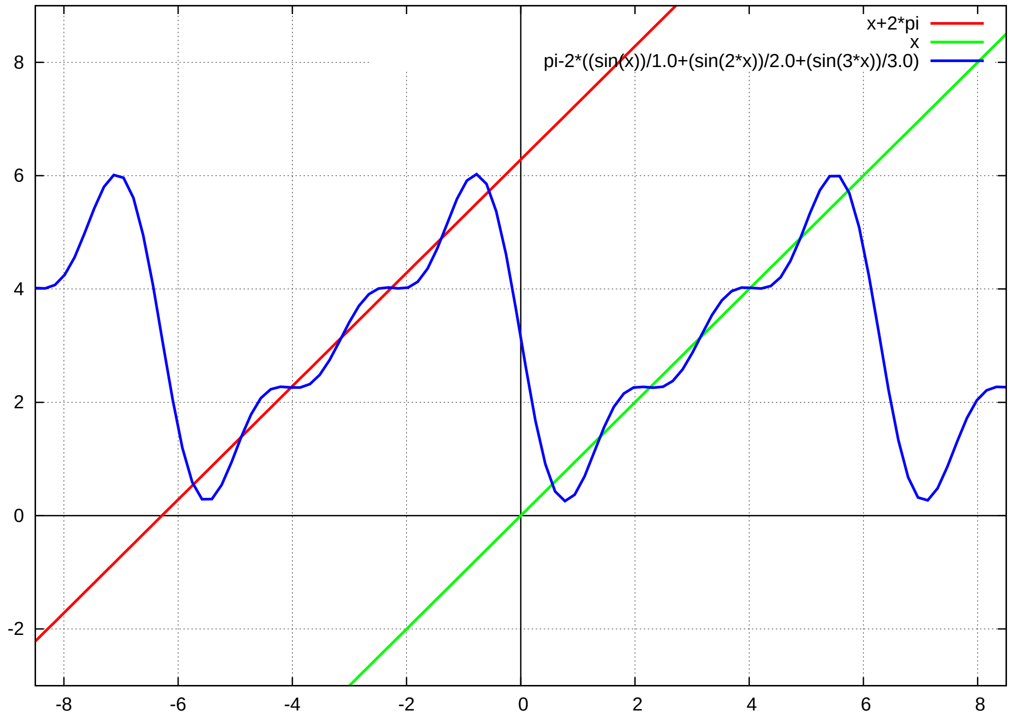
$$b_k = \frac{2}{c} \cdot \int_0^c f(x) \cdot \sin k\omega x \cdot \mathrm{dx}$$

Naloge:

▲ Izračunaj Fourierjevo vrsto za funkcijo $f(x) = x$, interval naj bo $(0, 2\pi)$, $c = 2\pi$

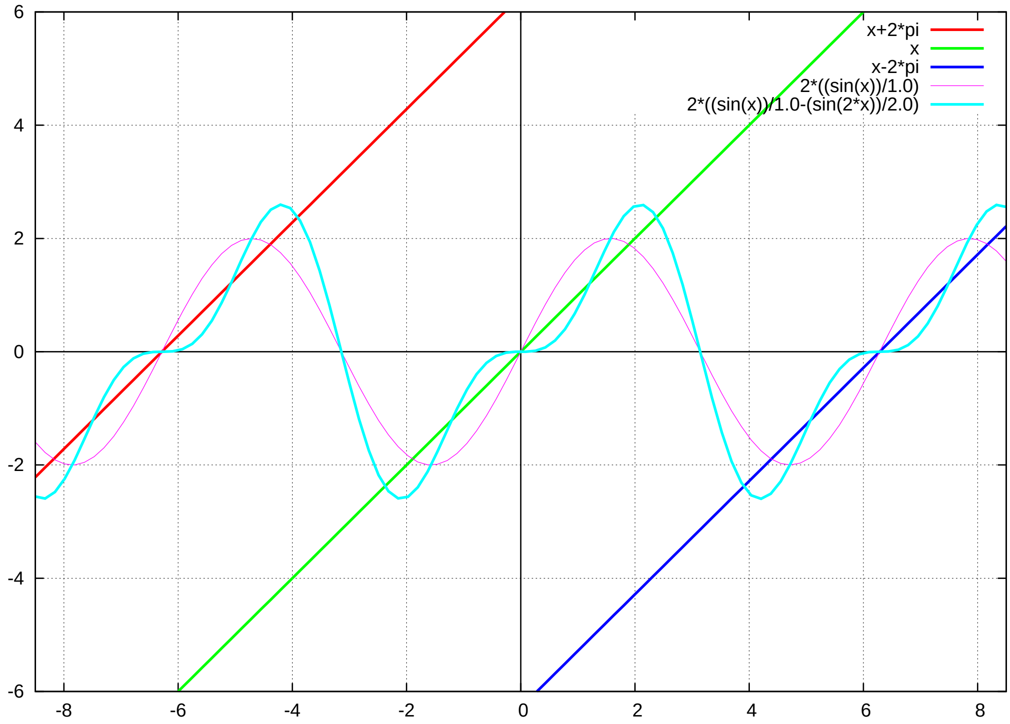
▷ $\boldsymbol{F}(x) = \pi - 2 \cdot (\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots)$

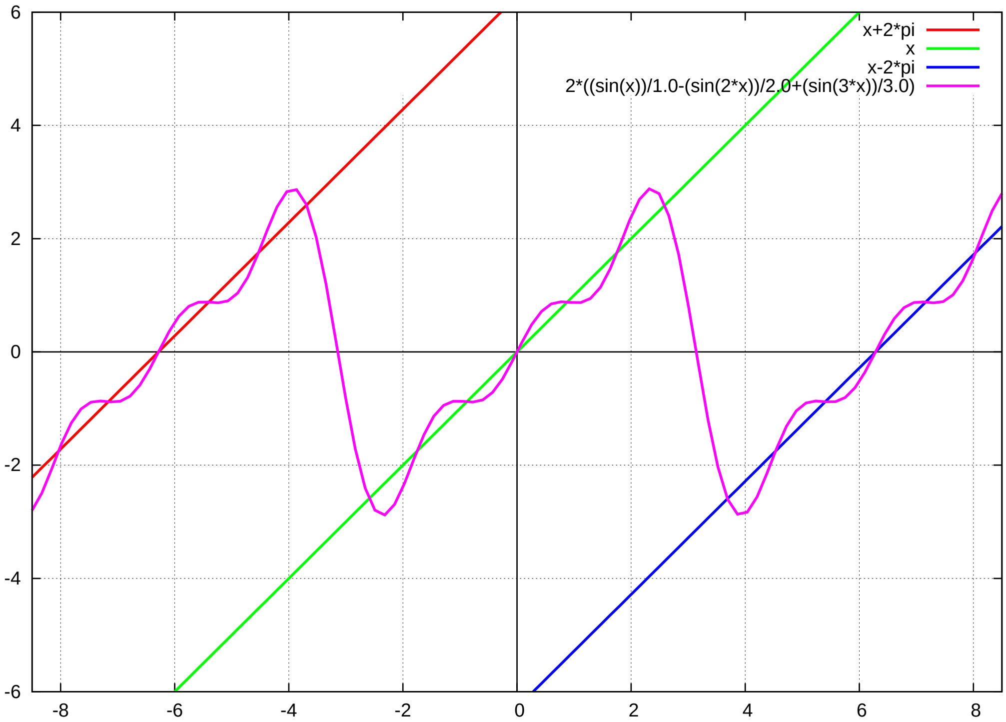




▲ Izračunaj Fourierjevo vrsto za funkcijo $f(x) = x$, interval naj bo $(-\pi, \pi)$, $c = 2\pi$

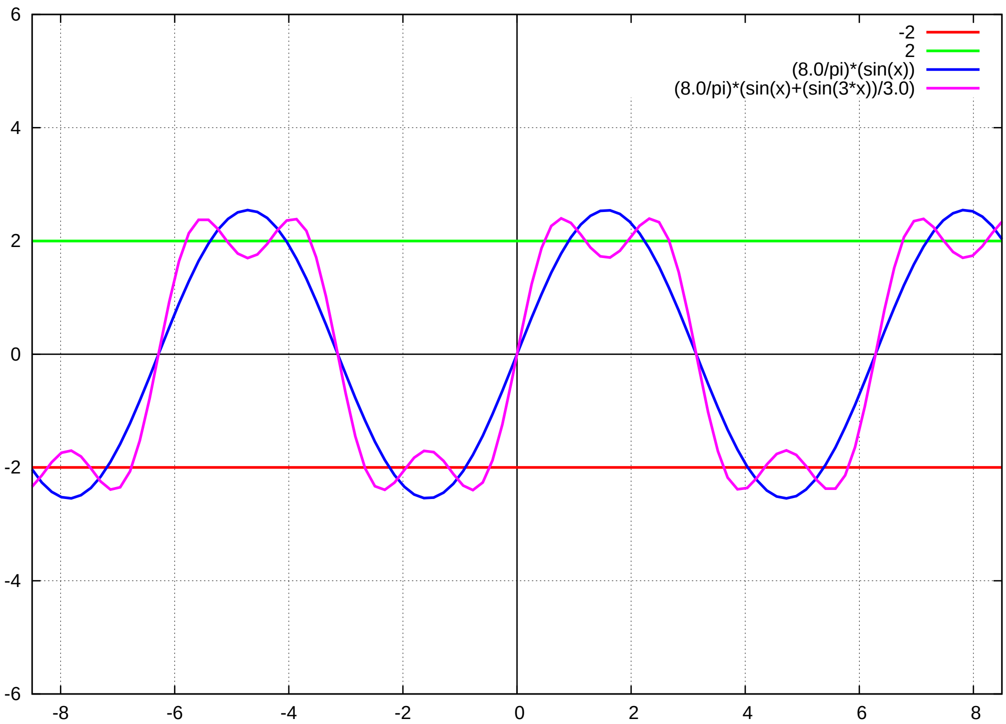
▷ $\boldsymbol{F}(x) = 2 \cdot (\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots)$

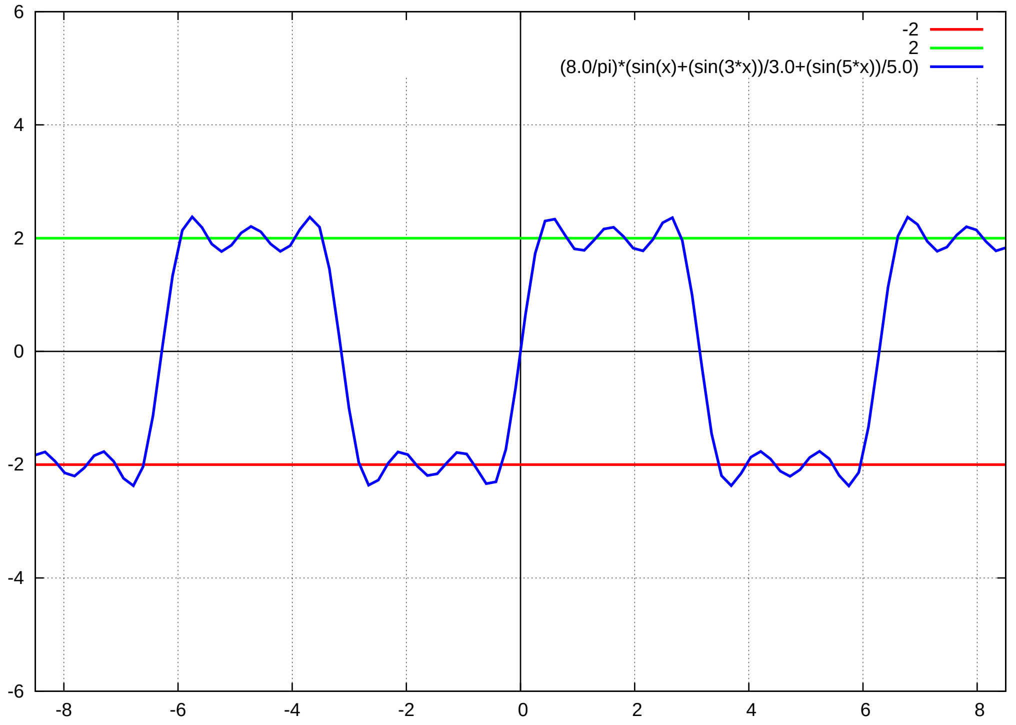




▲ Izračunaj Fourierjevo vrsto za funkcijo $f(x) = a$, interval naj bo $(0, \pi)$, $c = \pi$

▷ $\boldsymbol{F}(x) = \frac{4a}{\pi} \cdot (\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots)$




-2
2
(8.0/pi)*(sin(x)+(sin(3*x))/3.0+(sin(5*x))/5.0)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

POGLAVJE 7

NUMERIČNA MATEMATIKA

Matematični priročnik, str. 715-718 in str. 728-730

7.1 Iskanje ničel

Navadna iteracijska metoda

poglavje1-v3.tex Postopek navadne iteracijske metode:

1. Enačbo $f(x) = 0$ zapišemo v obliki $x = g(x)$, kar imenujemo oblika s fiksno točko.
2. Izberemo primeren začetni približek x_0.
3. Izračunamo zaporedje približkov $x_{n+1} = g(x_n)$.

Če je izpolnjen spodnji pogoj, potem zaporedje približkov konvergira k rešitvi enačbe $f(x) = 0$.

Pogoj za konvergenco navadne iteracijske metode:

Naj bo $X^{\star}$ rešitev enačbe $f(x) = 0$ in naj bo $f(x)$ povsod odvedljiva funkcija. Če obstaja tak interval od A do B, da:

1. sta začetni približek x_0 in prava rešitev enačbe $X^{\star}$ znotraj intervala $[A, B]$ in
2. obstaja konstanta k, da velja $|g'(x)| \leqslant k < 1$ za vse $x \in [A, B]$,

potem je navadna iteracijska metoda uspešna.

Konvergenca navadne iteracijske metode je tem hitrejša, čim manjše je število k v pogoju.

Naloga:

▲ Reši enačbo $x^3 - 5x + 1 = 0$.

▷ Najprej preoblikujemo enačbo. To lahko naredimo na več načinov, npr.:

$x = \sqrt[3]{5x-1}$,

$x = \dfrac{x^3+1}{5}$,

$x = x^3 - 4x + 1$,...

Vzemimo obliko $x = \dfrac{x^3+1}{5}$, torej $g(x) = \dfrac{x^3+1}{5}$.

Preverimo pogoj za konvergenco:

$g'(x) = \dfrac{3x^2}{5}$

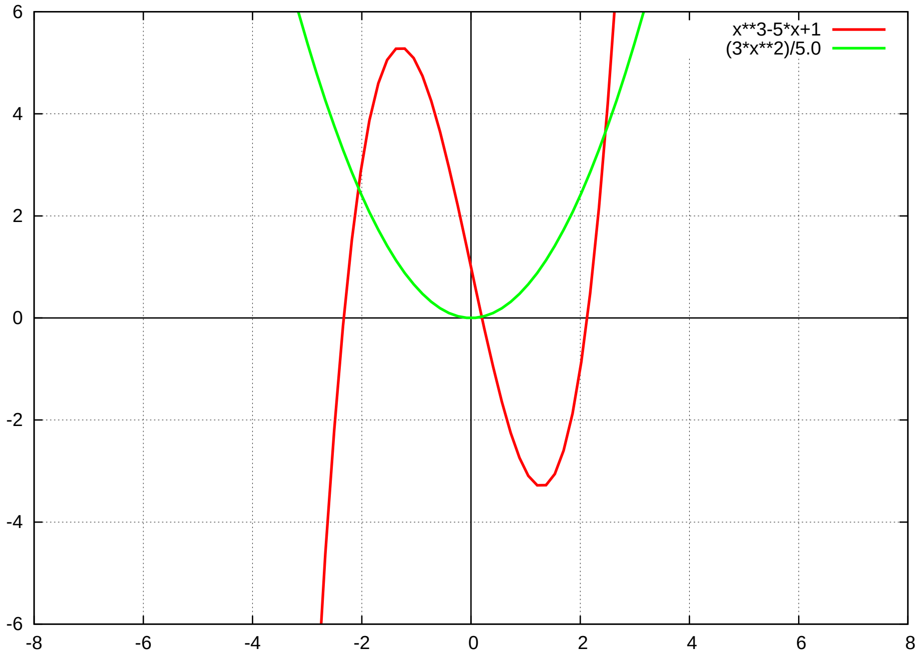
$|\dfrac{3x^2}{5}| < 1$

$|3x^2| < 5$

$|x^2| < \dfrac{5}{3}$

$-\sqrt{\dfrac{5}{3}} < x < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Dobljen rezultat nam pove, da lahko z izbrano obliko s fiksno točko iščemo le ničle na intervalu od $-\sqrt{\dfrac{5}{3}} < x < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$, pri čemer je $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \approx 1,29$. Tudi začetni približek moramo izbrati znotraj tega intervala.



▷ Iz grafa vidimo, da ima funkcija 3 ničle in da lahko z izbrano obliko s fiksno točko poiščemo le ničlo, ki leži na intervalu od 0 do 1. Izberemo začetni približek $x_0 = 0$ in izračunamo zaporedje približkov.

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = \frac{x_0^3+1}{5} = \frac{0^3+1}{5} = 0,2$$
$$x_2 = \frac{x_1^3+1}{5} = \frac{0,2^3+1}{5} = 0,2016$$
$$x_3 = \frac{x_2^3+1}{5} = \frac{0,2016^3+1}{5} = 0,2016387$$
$$x_4 = \frac{x_3^3+1}{5} = \frac{0,2016387^3+1}{5} = 0,2016396$$

Poskusimo z isto obliko s fiksno točko določiti ničlo med 2 in 3. Vzemimo začetni približek $x_0 = 2,5$.

$$x_0 = 2,5$$
$$x_1 = \frac{x_0^3+1}{5} = \frac{2,5^3+1}{5} = 3,325$$
$$x_2 = \frac{x_1^3+1}{5} = \frac{3,325^3+1}{5} = 7,5519906$$

Dobljene številke so vedno večje in se ne približujejo nobeni vrednosti, zato poskus ni bil uspešen. Vendar pa ni potrebno takoj obupati.

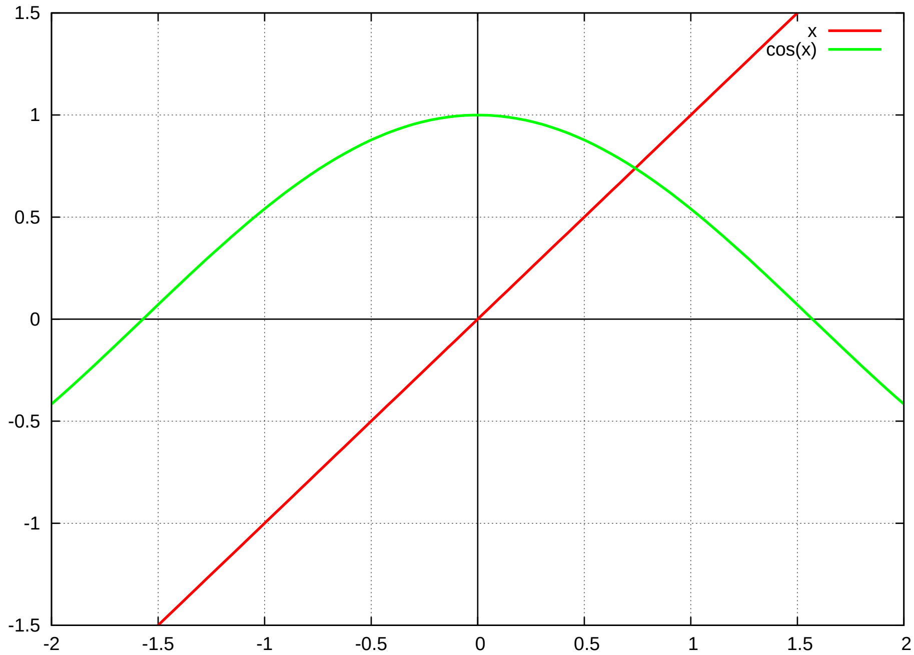
Izberimo drugačno obliko s fiksno točko in sicer $x = \sqrt[3]{5x-1}$ in poskusimo z istim začetnim približkom.

$$x_0 = 2,5$$
$$x_1 = \sqrt[3]{5x_0-1} = 2,2571787$$
$$x_2 = \sqrt[3]{5x_1-1} = 2,1747734$$
$$x_3 = \sqrt[3]{5x_2-1} = 2,1453382$$
$$x_4 = \sqrt[3]{5x_3-1} = 2,1346256$$
$$x_5 = \sqrt[3]{5x_4-1} = 2,1307$$
$$x_6 = \sqrt[3]{5x_5-1} = 2,1292579$$
$$x_7 = \sqrt[3]{5x_6-1} = 2,1287276$$
$$x_8 = \sqrt[3]{5x_7-1} = 2,1285326$$

Vrednosti vseskozi padajo, vendar vedno bolj počasi. Dobljeni približki konvergirajo k pravi vrednosti.

▲ Reši enačbo $x = \cos(x)$.

▷ Enačba je že zapisana v obliki s fiksno točke. Odvod funkcije $\cos(x)$ je enak $-\sin(x)$, kar je po absolutni vrednosti vedno manjše od 1, razen pri $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$



Iz grafa vidimo, da je rešitev enačbe okoli 0,75. Za začetni približek lahko vstavimo katerokoli vrednost med $-\frac{\pi}{2}$ in $+\frac{\pi}{2}$. Izberimo $x_0 = 1$.

$x_0 = 1$

$x_1 = \cos(x_0) = 0,5403023$

$x_2 = \cos(x_1) = 0,8575532$

$x_3 = \cos(x_2) = 0,6542897$

$x_{39} = 0,7390851$

Newtonova metoda

Newtonovo metodo za iskanje ničel imenujemo tudi tangenta metoda.

Postopek Newtonove metode:

1. Iz enačbe $f(x) = 0$ tvorimo funkcijo $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
2. Izberemo primeren začetni približek x_0.
3. Izračunamo zaporedje približkov $x_{n+1} = g(x_n)$.

Če je izpolnjen spodnji pogoj, potem zaporedje približkov konvergira k rešitvi enačbe $f(x) = 0$.

Pogoj za konvergenco Newtonove metode:

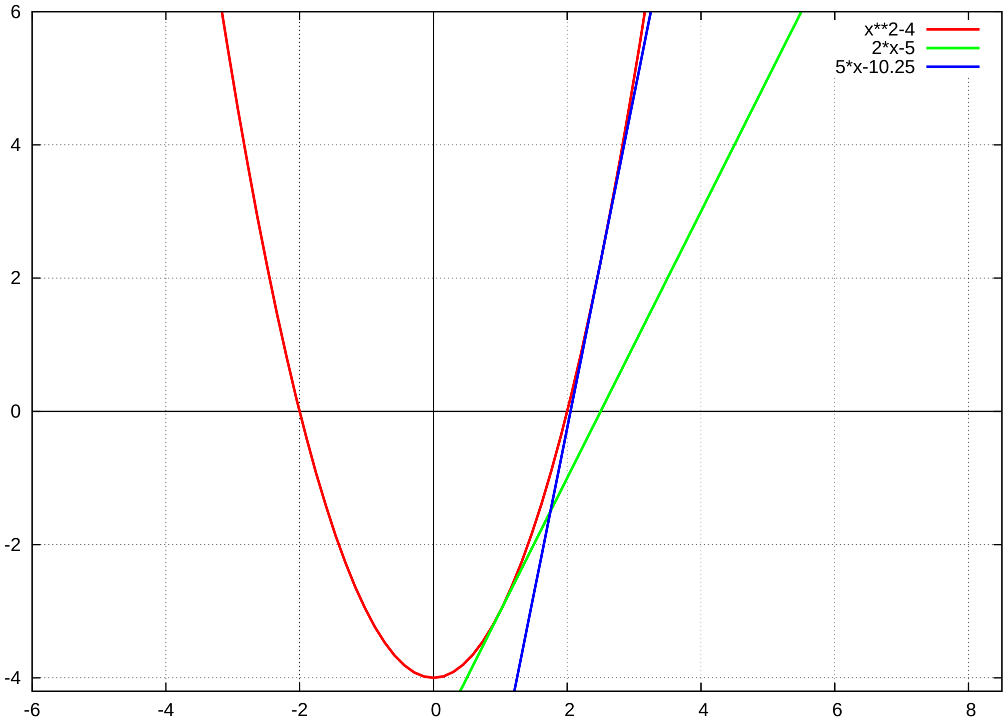
Naj bo $X^\star$ rešitev enačbe $f(x) = 0$ in naj bo $f(x)$ povsod odvedljiva funkcija. Če obstaja tak interval od A do B, da:

1. so vsi približki $x_0, x_1, x_{2,\ldots}$ in prava rešitev enačbe $X^\star$ znotraj intervala $[A, B]$,
2. velja $f'(x) \neq 0$ za vse $x \in [A, B]$ in
3. obstaja konstanta k, da velja $\left|\dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x) \cdot f'(x)}\right| \leqslant k < 1$ za vse $x \in [A, B]$,

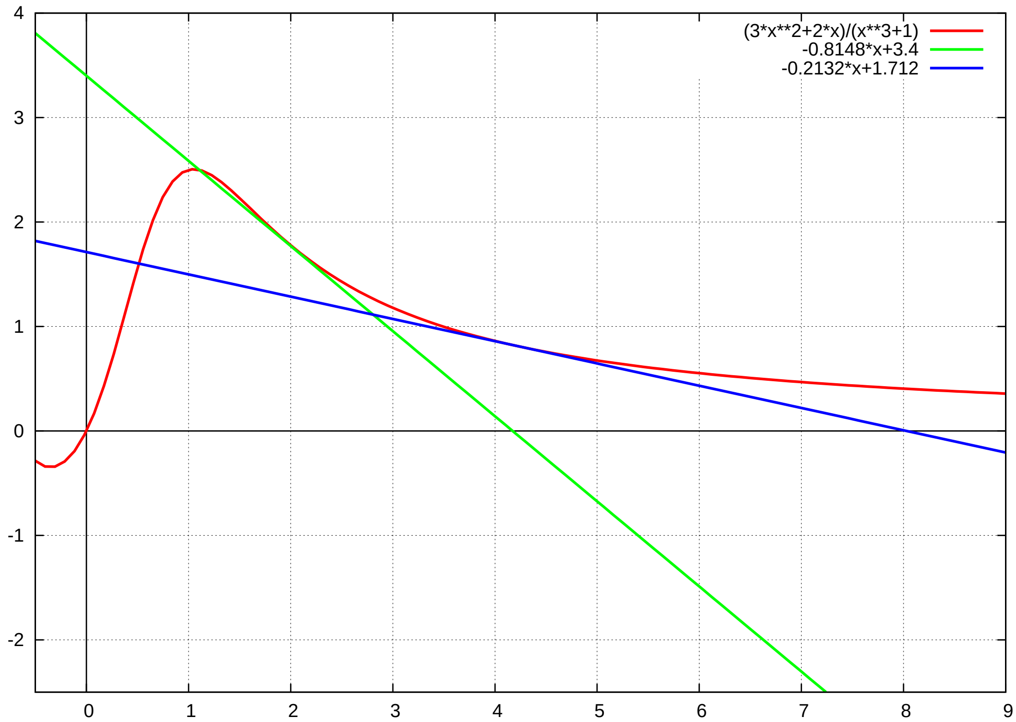
potem je Newtonova metoda uspešna.

Grafična ponazoritev Newtonove metode:

Vzemimo funkcijo $f(x) = x^2 - 4$ in začetni približek $x_0 = 0,5$. Narišemo tangento na funkcijo $f(x)$ in pogledamo, kje tangenta seka os x. Presečišče, ki je v danem primeru enako $2,25$, postane približek x_1. Postopek ponavljamo in če je izpolnjen pogoj za konvergenco, potem se približki hitro bližajo ničli.



Problem se pojavi, če dobimo točko, v kateri je odvod enak 0. To pomeni, da je tangenta tam vodoravna in torej nikjer ne seka osi x. Problem lahko nastopi tudi takrat, če med začetnim približkom in ničlo leži minimum oz. maksimum.



Naloga:

▲ Reši enačbo $x^3 - 5x + 1 = 0$.

▷ Izračunamo prvi in drugi odvod ter tvorimo funkcijo $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 5x + 1}{3x^2 - 5}$$

Preverimo pogoj za konvergenco:

Prvi odvod ne sme biti enak 0.

$$3x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1,29$$

Izbran interval ne sme vključevati vrednosti $-1,29$ in $+1,29$. Če iščemo ničlo, ki leži med 0 in 1 moramo torej kot začetno vrednost izbrati nekaj med tema dvema številoma. Če iščemo ničlo, ki leži med 2 in 3 pa moramo začeti z vrednostjo, ki je večja od $1,29$.

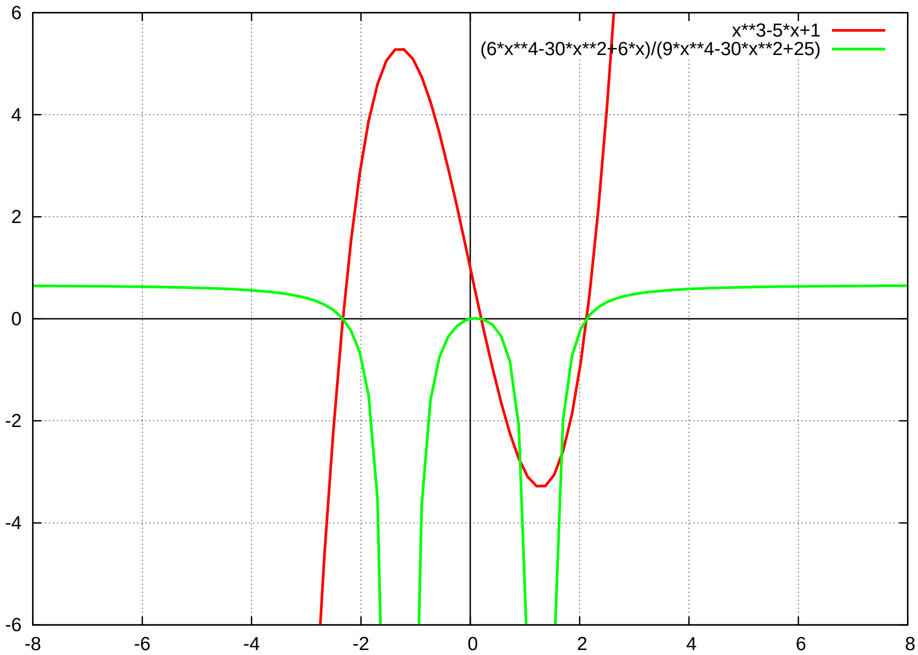
▷ Ostane nam še preverjanje zadnjega dela pogoja, ki pa je ponavadi precej težavno.

$$\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)\cdot f'(x)}\right| < 1$$

$$\left|\frac{(x^3-5x+1)\cdot 6x}{(3x^2-5)\cdot(3x^2-5)}\right| < 1$$

$$\left|\frac{6x^4-30x^2+6x}{9x^4-30x^2+25}\right| < 1$$

Dobljeno neenačbo je težko natančno rešiti, pravzaprav še težje, kot originalno nalogo. Iz grafa, ki ga nariše računalnik, lahko razberemo, da je neenačba izpolnjena za vrednosti manjše od -2, za vrednosti blizu 0 in za vrednosti večje od 2.



Iz grafa vidimo tudi pravilo, ki ga prej nismo izpostavili: izraz, ki nastopa v neenačbi je v ničlah funkcije enak 0 (**domača naloga: dokažite, da je to vedno res!**). Zato v splošnem velja, da je metoda uspešna, če začetni približek izberemo dovolj blizu prave vrednosti.

Izberimo torej začetni približek $x_0 = 0$ in izračunajmo zaporedje približkov po Newtonovi metodi.

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{x_0^3-5x_0+1}{3x_0^2-5} = 0 - \frac{0^3-5\cdot 0+1}{3\cdot 0^2-5} = 0,2$$

$$x_2 = g(x_1) = x_1 - \frac{x_1^3-5x_1+1}{3x_1^2-5} = 0,2 - \frac{0,2^3-5\cdot 0,2+1}{3\cdot 0,2^2-5} = 0,2016393$$

$$x_3 = g(x_2) = x_2 - \frac{x_2^3-5x_2+1}{3x_2^2-5} = 0,2016396$$

▷ Z Newtonovo metodo pridemo do rezultata z mnogo manjšim številom iteracij kot pri navadni iteracijski metodi.

Poiščimo še ničlo, ki leži med 2 in 3. Kot začetni približek vzemimo $x_0 = 2,5$.

$x_0 = 2,5$

$$x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{x_0^3 - 5x_0 + 1}{3x_0^2 - 5} = 2,5 - \frac{4,125}{13,75} = 2,2$$

$$x_2 = g(x_1) = x_1 - \frac{x_1^3 - 5x_1 + 1}{3x_1^2 - 5} = 2,2 - \frac{0,648}{9,52} = 2,1319328$$

$$x_3 = g(x_2) = x_2 - \frac{x_2^3 - 5x_2 + 1}{3x_2^2 - 5} = 2,1319328 - \frac{0,0302636}{8,6354124} = 2,1284282$$

▲ Poišči splošni postopek, kako s pomočjo Newtonove metode rešimo enačbo $x^2 - a = 0$.

▷ Imamo torej funkcijo $f(x) = x^2 - a$. Izračunajmo prvi odvod:

$f'(x) = 2x$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x}$$

Ker je ničla funkcije $f(x) = x^2 - a$ enaka $\sqrt{a}$, lahko dobljeno formulo uporabimo za računanje korenov.

Izračunaj $\sqrt{2}$. V tem primeru imamo $a = 2$. Kot začetni približek vzemimo kar $x_0 = 2$.

$x_0 = 2$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} = \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1^2 + a}{2x_1} = \frac{1,5^2 + 2}{2 \cdot 1,5} = \frac{4,25}{3} = 1,4166667$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{x_2^2 + a}{2x_2} = 1,4142157$$

$$x_4 = g(x_3) = \frac{x_3^2 + a}{2x_3} = 1,4142136$$

Izračunajmo še $\sqrt{7}$. Kot začetni približek vzamimo $x_0 = 7$.

$x_0 = 7$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} = \frac{7^2 + 7}{2 \cdot 7} = \frac{56}{14} = 4$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1^2 + a}{2x_1} = \frac{4^2 + 7}{2 \cdot 4} = \frac{23}{8} = 2,875$$

$x_3 = 2,654891304$

$x_4 =$2,645767044

▷ Zanima nas, ali izpeljani postopek vedno deluje.

Prvi odvod funkcije $f(x) = x^2 - a$ je enak $2x$, kar je enako nič le v točki 0. Oglejmo si sedaj še neenačbo, ki nastopa v pogoju za konvergenco.

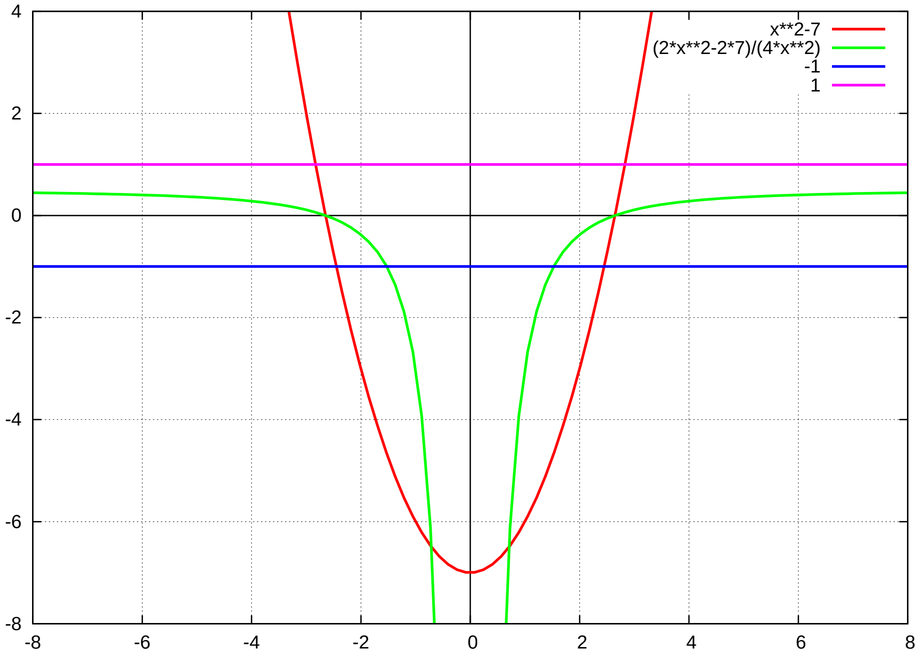
$$\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x) \cdot f'(x)}\right| < 1$$

$$\left|\frac{(x^2 - a) \cdot 2}{2x \cdot 2x}\right| < 1$$

$$\left|\frac{2x^2 - 2a}{4x^2}\right| < 1$$

Asimptota za funkcijo na levi strani je $\frac{1}{2}$, torej je za vse vrednosti, ki so večje od ničle, neenačba izpolnjena.

Oglejmo si dobljene ugotovitve še na grafu. Narišimo funkcijo x^2-7 in funkcijo $\frac{2x^2 - 2 \cdot 7}{4x^2}$.



▲ S pomočjo Newtonove metode poišči postopek, kako izračunamo $\ln x$, če imamo na voljo le osnovne računske operacije in funkcijo e^x.

▷ domača naloga

7.2 Vrednost polinoma in njegovih odvodov v dani točki

Dan je polinom $P(x)$ in točka x_0. Izračunaj vrednosti $P(x_0), P'(x_0), P''(x_0), \ldots$

Naloga sama po sebi ni težka, saj odvode polinoma znamo izračunati, z zaporednim odvajanjem pa dobimo tudi vedno enostavnejši rezultat.

Hornerjev algoritem je numerični postopek, kako takšno nalogo rešimo brez računanja odvodov, kar je v marsikaterem primeru hitreje. Hkrati je to tudi primerna rešitev, če nalogo rešujemo z računalnikom.

Hornerjev algoritem si bomo ogledali na primeru.

Naloge:

▲ Naj bo $P(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 7x - 1$. Izračunaj vrednost polinoma in vrednosti prvih treh odvodov v točki 3.

▷ $P(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 7x - 1$

$P'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 2x + 7$

$P''(x) = 20x^3 + 36x^2 - 24x - 2$

$P'''(x) = 60x^2 + 72x - 24$

Rezultati naloge so:

$P(3) = 389, P'(3) = 622, P''(3) = 790, P'''(3) = 732$

Po Hornerjevem algoritmu dobimo:

	1	3	-4	-1	7	-1	
		3	18	42	123	390	
3	1	6	14	41	130	389	$\cdot\, 0! = 389 = P(3)$
		3	27	123	492		
3	1	9	41	164	622		$\cdot\, 1! = 622 = P'(3)$
		3	36	231			
3	1	12	77	395			$\cdot\, 2! = 790 = P''(3)$
		3	45				
3	1	15	122				$\cdot\, 3! = 732 = P'''(3)$

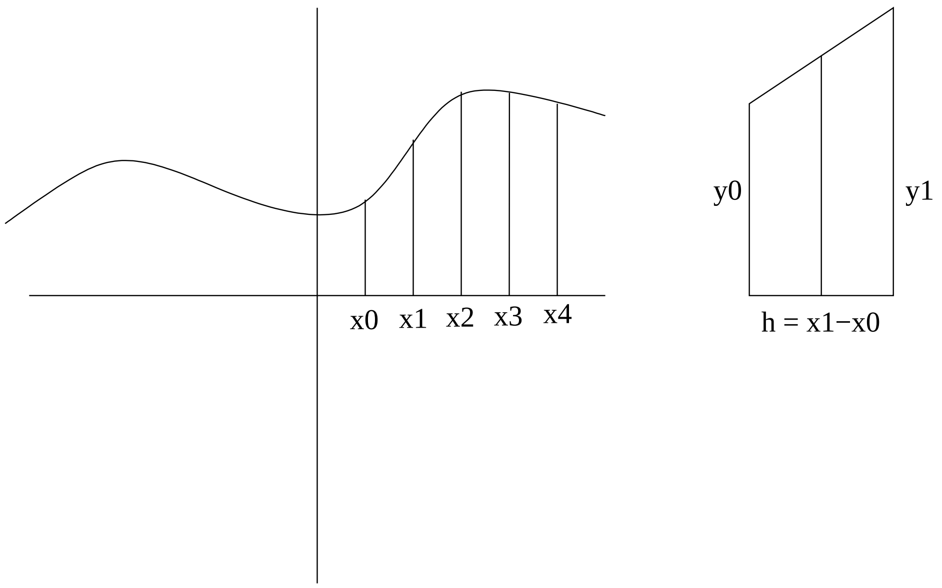
▲ Naj bo $P(x) = 3x^3 - 4x - 1$. Izračunaj vrednost polinoma in vrednosti prvih treh odvodov v točki -1.

▷ domača naloga

7.3 Numerična integracija

Trapezna formula

Določen integral je ploščina funkcije pod krivuljo. Iskano ploščino lahko razdelimo na majhne trapeze z enako širino. Bolj ozki so trapezi, več jih je in bolj natančen rezultat dobimo.



Ploščina trapeza, ki ima stranici y_0 in y_1 ter širino h je enaka $\dfrac{y_0 + y_1}{2} \cdot h$.

Če seštejemo trapeze dobimo:

ploščina = trapez1 + trapez2 + ... + trapezN

ploščina = $\dfrac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \dfrac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \ldots + \dfrac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$

ploščina = $h \cdot (\dfrac{y_0}{2} + \dfrac{y_1}{2} + \dfrac{y_1}{2} + \dfrac{y_2}{2} + \ldots + \dfrac{y_{n-1}}{2} + \dfrac{y_n}{2})$

ploščina = $h \cdot (\dfrac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \dfrac{y_n}{2})$

Dobljen rezultat imenujemo trapezna formula in ga običajno zapišemo takole:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot \mathrm{dx} \approx h \cdot (\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2})$$

Trapezna formula je po natančnosti drugega reda, kar pomeni, da daje točne rezultate le za ploščine pod premicami.

Naloga:

▲ $\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} = ?$

▷ Interval razdelimo na 4 dele, širina posameznega dela je 0,5.

$$\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} \approx 0,5 \cdot (\frac{y_0}{2} + y_{0,5} + y_1 + y_{1,5} + \frac{y_2}{2}) = 0,5 \cdot (\frac{0^2}{2} + 0,5^2 + 1^2 + 1,5^2 + \frac{2^2}{2}) = 2,75$$

Točen rezultat dobimo z naslednjim izračunom:

$$\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} = (\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3} = 2,66$$

Hermitova trapezna formula

Hermitova trapezna formula se glasi takole:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot \mathrm{dx} \approx h \cdot (\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}) + \frac{h^2}{12} \cdot (y'_0 - y'_n)$$

Hermitova trapezna formula je po natančnosti četrtega reda, kar pomeni, da daje točne rezultate le za ploščine pod polinomi do vključno tretje stopnje.

Naloga:

▲ $\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} = ?$

▷ Interval razdelimo na 4 dele. V Hermitovi formuli potrebujemo tudi odvod funkcije v skrajnih točkah intervala, zato najprej funkcijo odvajamo.

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}(x^2) = 2x$$

Sedaj vstavimo v formulo:

$$\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} \approx 0,5 \cdot (\frac{y_0}{2} + y_{0,5} + y_1 + y_{1,5} + \frac{y_2}{2}) + \frac{0,5^2}{12} \cdot (2 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = 2,66$$

Dobimo točen rezultat, kar je v skladu z natančnostjo Hermitove trapezne formule.

Simpsonova formula

Simpsonova formula se glasi takole:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot \mathrm{dx} \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Tudi Simpsonova formula je po natančnosti četrtega reda, kar pomeni, da daje točne rezultate le za ploščine pod polinomi do vključno tretje stopnje.

Naloga:

▲ $\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} =?$

▷ Tudi v tem primeru interval razdelimo na 4 dele.

$$\int\limits_0^2 x^2 \cdot \mathrm{dx} \approx \frac{0,5}{3} \cdot (y_0 + 4y_{0,5} + 2y_1 + 4y_{1,5} + y_2) =$$

$$= \frac{0,5}{3} \cdot (0^2 + 4 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1,5^2 + 2) = 2,66$$

Dobimo točen rezultat.

Opomba za vse metode numerične integracije

Pri vseh metodah za numerično integracijo napaka zelo hitro narašča, če manjšamo natančnost računanja!

POGLAVJE 8

MATRIKE

Matematični priročnik, str. 219-227

8.1 Notacija

Matrika velikosti $m \times n$ je skupek $m \cdot n$ števil urejenih v m vrstic po n stolpcev.

Matrike označujemo z velikimi tiskanimi črkami.

Primer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -14 & 8 \end{bmatrix}$

Matrika A ima velikost 2×3.

Elemente matrike označujemo z malimi črkami in indeksi oblike (vrstica, stolpec).

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Nekatere matrike imajo zaradi svoje oblike posebna imena:

Kvadratna matrika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & - & \dots & - \\ - & a_{22} & \dots & - \\ \ddots & & & \\ - & - & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}$$

Zgornje-trikotna kvadratna matrika:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalna matrika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & 0 & & a_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}$$

Enotska matrika (označimo jo z E):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

8.2 Osnovne operacije z matrikami

1. Transponiranje matrik

Transponirano matriko A^T dobimo iz A tako, da zamenjamo vrstice in stolpce.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Seštevanje matrik

Seštevamo lahko le matrike enake velikosti. Seštejemo istoležne elemente.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Množenje matrike s številom

Vsak element posebej pomnožimo s številom.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

4. Množenje matrik

Rezultat množenja matrik $A \cdot B$ je matrika C, ki jo dobimo po naslednjem pravilu.

Naj bo matrika A velikosti $m \times n$ in matrika B velikosti $n \times p$. Potem je $C = A \cdot B$ matrika velikosti $m \times p$, katere elementi so enaki $c_{\mathrm{xy}} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{xi}} \cdot b_{\mathrm{iy}}$.

Elemente matrike C enostavneje zapišemo kot $c_{\mathrm{xy}} = a_{\mathrm{xi}} \cdot b_{\mathrm{iy}}$, kar imenujemo Einsteinov simulacijski dogovor.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{21} & a_{13} \cdot b_{31} \\ a_{21} \cdot b_{11} & a_{22} \cdot b_{21} & a_{23} \cdot b_{31} \end{bmatrix}$$

Množenje matrik ni komutativno. V zgornjem primeru produkta $B \cdot A$ sploh ne moremo izračunati, ker velikosti matrik ne ustrezajo. Če množimo dve kvadratni matriki, ju lahko zmnožimo v kateremkoli vrstnem redu, vendar pa je rezultat množenja v splošnem različen.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

8.3 Determinanta matrike

Determinanta matrike A je število $\det A$. Determinanto imajo le kvadratne matrike. Determiknanto na kratko zapišemo tako, da v zapisu matrike oglate oklepaje zamenjamo z ravnimi črtami.

Za matriko 2×2 determinanto izračunamo po naslednji formuli:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Primer:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Za matrike 3×3 determinanto izračunamo tako, da dodamo pomožna stolpca:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12}.a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Primer:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right. = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

Pravilo z dodajanjem pomožnih stolpcev ne velja za matrike večjih dimenzij!

Poddeterminanto matrike dobimo tako, da v matriki prečrtamo eno vrstico in en stolpec in izračunamo determinanto dobljene manjše matrike.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det_{11} A = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

$$\det_{31} A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

Kofaktor elementa a_{ij} označimo kot A_{ij} in ga izračunamo kot $A_{\mathrm{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \det_{\mathrm{ij}} A$.

Primer:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (8 - 14) = 6$$

Kofaktorje uporabljamo pri izračunu determinant za večje matrike. Postopek imenujemo razvoj matrike po eni vrstici oz. po enem stolpcu.

Razvoj po prvi vrstici poteka po naslednji formuli:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Razvoj po prvem stolpcu poteka po naslednji formuli:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + \ldots + a_{m1} \cdot A_{m1}$$

Tukaj je primer, pri katerem determinanto izračunamo z razvojem po tretji vrstici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 1 \cdot (-3) + 8 \cdot (-1) \cdot (-6) + 9 \cdot 1 \cdot (-3) = -21 + 48 - 27 = 0$$

Pri izračunu determinant si lahko pomagamo z naslednjimi lastnostmi:

- Matrika , ki ima eno celo vrstico oz. en cel stolpec sestavljen iz samih ničel ima determinanto enako nič.
- Če sta v matriki dve vrstici oz. dva stolpca med seboj enaka, potem je determinanta matrike enaka nič. Enako velja tudi takrat, če sta dve vrstici oz. dva stolpca proporcionalna.
- Če v matriki A eno vrstico oz. en stolpec pomnožimo s k in dobljeno matriko označimo z B, potem velja $\det B = k \cdot \det A$.
- Zgornje-trikotna matrika A ima determinanto, ki je enaka produktu elementov na diagonali.

Računanje determinante za večjo matriko si pogosto lahko olajšamo tako, da uporabimo naštete lastnosti determinant.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \text{razvijemo po drugem stolpcu} =$$

$$5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot (-1) \cdot 0 + (-7) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-21) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} =$$

$$= -21 \cdot (4 - 5 + 10 - 16) = -21 \cdot (-7) = 147$$

8.4 Inverzna matrika

Inverzno matriko označimo z A^{-1} in jo imenujemo tudi obratna matrika.

Velja: A$\cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Izračunamo jo lahko tako, da najprej izračunamo adjungirano matriko.

Imejmo matriko A. Njeno adjungirano matriko $\operatorname{adj} A$ dobimo tako, da zapišemo kofaktorje vseh elementov in dobljeno matriko transponiramo.

Primer za matriko velikosti 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer za matriko velikosti 3×3:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$B_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$B_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$B_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzno matriko nato izračunamo po formuli:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A)$$

Naloge:

▲ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

▷ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A = -2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{adj} A = (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Preizkus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▲ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▷ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Preizkus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzno matriko lahko izračunamo tudi po postopku zamenjave spremenljivk.

Postopek je naslednji:

1. Element na diagonali imenujemo pivot. Ne sme biti enak 0.
2. Konstanto k pred matriko pomnožimo z $\frac{1}{\text{pivot}}$.
3. Namesto pivota zapišemo $(\frac{1}{k})^2$.
4. V stolpcu s pivotom množimo z $\frac{1}{k}$.
5. V vrstici s pivotom množimo z $-\frac{1}{k}$.
6. Ostale elemente najprej pomnožimo s pivotom in potem odštejemo produkt števila, ki je v isti vrstici kot element in v istem stolpcu kot pivot, s številom, ki je v istem stolpcu kot element in v isti vrstici kot element.
7. Postopek ponavljamo po celotni diagonali in dobimo A^{-1}. Ni potrebno, da pivote izbiramo po vrsti, moramo pa vsako vrstico uporabiti le en enkrat.

Naloge:

▲ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▷ Izberemo pivot v prvi vrstici, ki je enak 1. Konstanta k pred matriko je tudi enaka 1.

$$A^{-1}_{(1)} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} (\frac{1}{1})^2 & 0 \cdot (-\frac{1}{1}) & 0 \cdot (-\frac{1}{1}) \\ 1 \cdot \frac{1}{1} & 1 \cdot 1 - (1 \cdot 0) & 1 \cdot 1 - (1 \cdot 0) \\ 2 \cdot \frac{1}{1} & 0 \cdot 1 - (2 \cdot 0) & 1 \cdot 1 - (2 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izberemo pivot v drugi vrstici, ki je enak 1. Konstanta k pred matriko je enaka 1. Označimo si, da smo pivot v prvi in drugi vrstici že obdelali.

$$A^{-1}_{(1,2)} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - (0 \cdot 1) & 0 \cdot \frac{1}{1} & 0 \cdot 1 - (0 \cdot 1) \\ 1 \cdot (-\frac{1}{1}) & (\frac{1}{1})^2 & 1 \cdot (-\frac{1}{1}) \\ 2 \cdot 1 - (0 \cdot 1) & 0 \cdot \frac{1}{1} & 1 \cdot 1 - (0 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izberemo pivot v tretji vrstici, ki je spet enak 1. Konstanta k pred matriko je še vedno enaka 1. Označimo si, da smo pivote v vseh treh vrsticah že obdelali.

$$A^{-1}_{(1,2,3)} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - (0 \cdot 2) & 0 \cdot 1 - (0 \cdot 0) & 0 \cdot \frac{1}{1} \\ -1 \cdot 1 - (-1 \cdot 2) & 1 \cdot 1 - (-1 \cdot 0) & -1 \cdot \frac{1}{1} \\ 2 \cdot (-\frac{1}{1}) & 0 \cdot (-\frac{1}{1}) & (\frac{1}{1})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▲ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▷ Izberemo pivot v tretji vrstici, ki je enak 1. Konstanta k pred matriko je enaka 1.

$$B^{-1}_{(3)} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 - (2 \cdot 2) & 1 \cdot 1 - (2 \cdot 0) & 2 \cdot \frac{1}{1} \\ 1 \cdot 1 - (0 \cdot 2) & 2 \cdot 1 - (0 \cdot 0) & 0 \cdot \frac{1}{1} \\ 2 \cdot (-\frac{1}{1}) & 0 \cdot (-\frac{1}{1}) & (\frac{1}{1})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izberemo pivot v drugi vrstici, ki je enak 2. Konstanta k pred matriko je enaka 1. Označimo si, da smo pivot v drugi in tretji vrstici že obdelali.

$$B^{-1}_{(3,2)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 \cdot 2 - (1 \cdot 1) & 1 \cdot \frac{1}{1} & 2 \cdot 2 - (1 \cdot 0) \\ 1 \cdot (-\frac{1}{1}) & (\frac{1}{1})^2 & 0 \cdot (-\frac{1}{1}) \\ -2 \cdot 2 - (0 \cdot 1) & 0 \cdot \frac{1}{1} & 1 \cdot 2 - (0 \cdot 0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

▷ Na koncu izberemo še pivot v prvi vrstici, ki je enak -9. Konstanta k pred matriko je enaka $\frac{1}{2}$, torej je $\frac{1}{k} = 2$. Označimo si, da smo pivote v vseh treh vrsticah že obdelali.

$$B^{-1}_{(3,2,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-9} \cdot \begin{bmatrix} 2^2 & 1 \cdot (-2) & 4 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 2 & 1 \cdot (-9) - (-1 \cdot 1) & 0 \cdot (-9) - (-1 \cdot 4) \\ -4 \cdot 2 & 0 \cdot (-9) - (-4 \cdot 1) & 2 \cdot (-9) - (-4 \cdot 4) \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -2 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

▲ Izračunaj $\det A$, A^{-1}, A^2 in $\det A^2$ za naslednjo matriko:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

▷ domača naloga

8.5 Matrične enačbe

V matričnih enačbah je neznanka matrika X.

Matrično enačbo preoblikujemo po enakih pravilih kot pri navadni enačbi, paziti moramo le, ker množenje matrik ni komutativno.

Naloge:

▲ Izračunaj $X = (A + E) \cdot A^{-1}$ za naslednjo matriko:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

▷ $\det A = -2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{adj} A = (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4 + 3 & 2 - 1 \\ -6 + \frac{15}{2} & 3 - \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

▲ Izračunaj X, če velja $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

▷ Enačbo preoblikujemo tako, da z leve strani pomnožimo z A^{-1}. Dobimo $X = A^{-1} \cdot B$.

$\det A = -2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{adj} A = (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10+6 \\ \frac{15}{2} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Preizkus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+9 \\ -12+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

▲ Izračunaj X, če velja $A \cdot X - 2 \cdot B \cdot X = E$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ domača naloga

POGLAVJE 9

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Matematični priročnik, str. 237-243

9.1 Uvod

V splošnem imamo n linearnih enačb z m neznankami.

Sistem n **linearno neodvisnih** enačb z n neznankami se imenuje Cramerjev sistem in ima natanko eno rešitev.

Sistem n enačb z n spremenljivkami, pri katerem enačbe niso linearno neodvisne med seboj, nima rešitve ali pa ima neskončno rešitev.

Obstaja več metod za reševanje sistema linearnih enačb. Najbolj pogosto uporabljene so pretvorba v matrično enačbo, Gaussova eliminacija in Cramerjeva metoda.

9.2 Pretvorba v matrično enačbo

Naloga:

▲ Reši podan sistem enačb.

$$
\begin{aligned}
&2x - y + z = 1\\
&x + 2y - z = 2\\
&x - y + 2z = 0
\end{aligned}
$$

▷ Reševanje poteka na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Iz dobljenega rezultata sledi $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{1}{2}$ in $z = -\frac{1}{6}$.

9.3 Gaussova eliminacija

Naloga:

▲ Reši podan sistem enačb.

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - z = 2$$
$$x - y + 2z = 0$$

▷ Pri Gaussovi eliminaciji na vsakem koraku sistem zmanjšamo za eno enačbo in eno neznanko.

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - z = 2$$
$$x - y + 2z = 0$$

V prvem koraku tretjo enačbo pomnožimo z -2 in jo prištejemo k prvi. Nato jo pomnožimo še z -1 in jo prištejemo k drugi. Dobimo dve enačbi z dvema neznankama.

$$y - 3z = 1$$
$$3y - 3z = 2$$

Sedaj drugo enačbo pomnožimo z -1 in jo prištejemo k prvi. Dobimo:

$$-2y = -1$$

Izračunali smo $y = \frac{1}{2}$. Rezultat vstavimo v eno od dveh enačb na drugem koraku. Dobimo:

$$\frac{1}{2} - 3z = 1$$

Iz te enačbe izračunamo $z = -\frac{1}{6}$. Dobljena y in z vstavimo v eno od originalnih enačb in dobimo $x = \frac{5}{6}$.

9.4 Cramerjeva metoda

Naloga:

▲ Reši podan sistem enačb.

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - z = 2$$
$$x - y + 2z = 0$$

▷ Pri Cramerjevi metodi zaporedoma izračunamo determinante v matrikah, v katerih posamezen stolpec zamenjamo s stolpcem na desni strani.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right. = 8 + 1 - 1 - 2 - 2 + 2 = 6$$

$$\det A_x = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right. = 4 + 0 - 2 - 0 - 1 + 4 = 5$$

$$\det A_y = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right. = 8 - 1 + 0 - 2 - 0 - 2 = 3$$

$$\det A_z = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right. = 0 - 2 - 1 - 2 + 4 - 0 = -1$$

Rešitve sistema enačb so:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\det A_z}{\det A} = -\frac{1}{6}$$

POGLAVJE 10

STATISTIKA

Matematični priročnik, str. 610-614, tabele str. 927-931

10.1 Opredelitev problema

Preučujemo množico možnih izidov nekega poskusa oz. pojava.

1. Če izid nekega ponovljivega poskusa oz. pojava ni vedno enaka vrednost, nas zanimajo zakonitosti glede izida. S tem se ukvarja VERJETNOSTNI RAČUN. V splošnem moramo preučiti vse možne izide poskusa. Pri ugotavljanju in štetju vseh izidov nam pomaga KOMBINATORIKA. V splošnem velja, da če se nek poskus oz. pojav ponovi neskončno mnogokrat, potem izmerjeni rezultati ustrezajo izračunanim.

   Primer: Hkrati vržemo dve igralni kocki. Preuči možne izide — kateri so in s kakšno verjetnostjo se pojavljajo.

2. Imejmo poskus oz. pojav, ki ne sledi matematičnim zakonitostim oz. le-teh ne poznamo. To pomeni, da o izidih poskusa ne moremo reči ničesar, ne da bi ga prej izvedli (npr. pri kocki vemo že vnaprej, da so vsi rezultati enako verjetni, pri volitvah pa se teoretično gledano lahko zgodi karkoli). Izide poskusa želimo podati v strnjeni obliki, iz katere bodo razvidne zakonitosti izvedenega poskusa (ki pa seveda nikakor ne opisujejo nobenega prihodnjega poskusa). S tem se ukvarja STATISTIKA. Pogosto ne moremo ali nočemo preučiti vseh izidov izvedenega poskusa, ampak vzamemo samo en del. Takrat nas dodatno zanima, v kolikšni meri enake zakonitosti, ki smo jih ugotovili na obravnavanem delu množice, veljajo za celotno množico. Celotno množico poskusov imenujemo POPULACIJA, obravnavani del množice poskusov pa VZOREC.

   Primer: Na kolokviju je sodelovalo 50 študentov. Preuči rezultate.

10.2 Grupiranje in prikazovanje izmerjenih podatkov

Izide poskusa oz. pojava lahko:

- naštejemo v obliki navadnega ali urejenega seznama,
- prikažemo tabelarično,
- prikažemo grafično.

Primer:

V osmem razredu osnovne šole izmerimo velikost fantov. Dobimo naslednje vrednosti: 167, 174, 172, 168, 178, 185, 172, 173, 168, 178, 173, 160, 178, 176, 165, 165, 171, 182, 172, 167, 170, 174.

Urejen seznam: 160, 165, 165, 167, 167, 168, 168, 170, 171, 172, 172, 172, 173, 173, 174, 174, 176, 178, 178, 178, 182, 185.

Tabela:

	160	165	167	168	170	171	172	173	174	176	178	182	185
f	1	2	2	2	1	1	3	2	2	1	3	1	1

Število ponavljanj istega izida je **frekvenca**.

Tabelarični prikaz po razredih

Če je možnih izidov veliko, jih grupiramo v podintervale, ki jih imenujemo **razredi**. Primerno število razredov dobimo po **Sturgesovem pravilu**: $k = 1 + 3,32 \cdot \log n$, pri čemer je n število izidov in k priporočeno število razredov.

Primer:

Vzamimo rezultate glede velikosti fantov iz prejšnjega primera.

$k = 1 + 3,32 \cdot \log 22 = 5,45$

Vzamemo 6 razredov. Najmanjši izid $\min = 160$, največji izid $\max = 185$. Razlika $\max - \min + 1 = 26$. Da se deljenje izide, bomo dodali 4 in sicer po 2 na vsaki strani. Dobimo $\min = 158$ in $\max = 187$.

širina razreda =$(\max - \min + 1)/k = 5$

Tabela razredov:

razred	višina (cm)	x_i (cm)	f_i	F_i	f_i (%)	F_i (%)
1	158-162	160	1	1	4,55	4,55
2	163-167	165	4	5	18,18	22,73
3	168-172	170	7	12	31,82	54,55
4	173-177	175	5	17	22,73	77,27
5	178-182	180	4	21	18,18	95,45
6	183-187	185	1	22	4,55	100,00
skupaj			22		100	

Srednjo vrednost razred x_i izračunamo kot $(\min_i + \max_i)/2$, pri čemer sta $\min_i$ in $\max_i$ spodnja in zgornja meja razreda.

Frekvenca f_i je število izidov, ki spadajo v določen razred.

Vsota frekvenc F_i je število izidov, ki so manjši ali enaki zgornji meji določenega razreda.

Relativna frekvenca f_i (%) in vsota relativnih frekvenc F_i (%) sta delež glede na število izidov n.

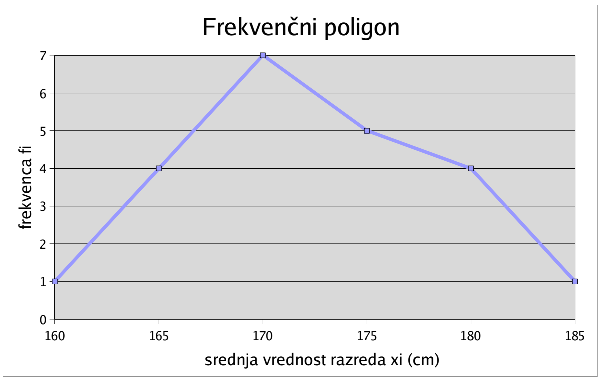
Grafični načini prikaza

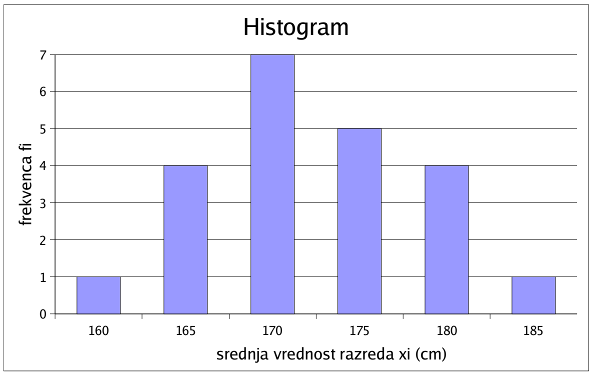
Najpomembnejši grafični načini prikaza so:

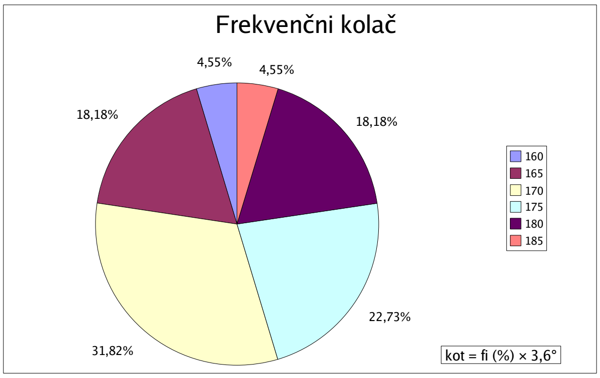
1. frekvenčni poligon (linechart)
2. stolpični prikaz ali histogram (barchart, histogram)
3. frekvenčni kolač (piechart)
4. komulativni frekvenčni poligon
5. komulativni stolpični prikaz

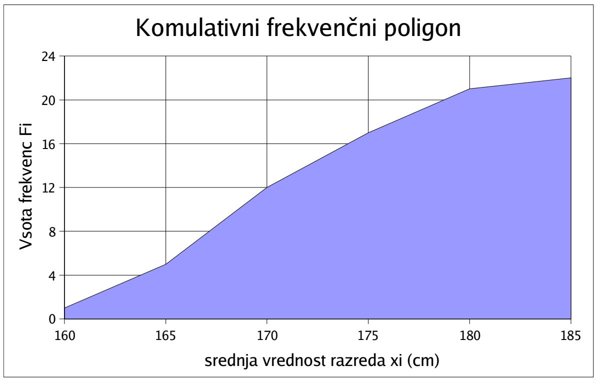
Primer: Višina fantov v osmem razredu OŠ

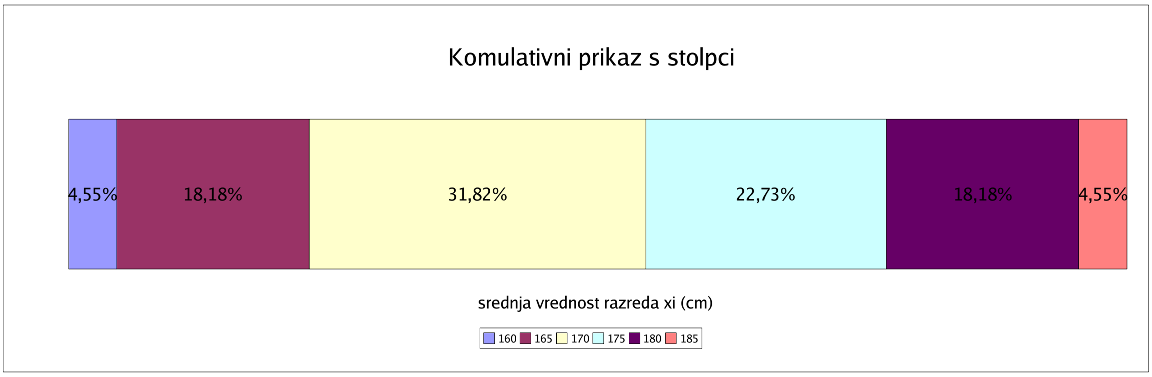
razred	višina (cm)	xi (cm)	fi	Fi	fi (%)	Fi (%)
1	158-162	**160**	**1**	1	4,55	4,55
2	163-167	**165**	**4**	5	18,18	22,73
3	168-172	**170**	**7**	12	31,82	54.55
4	173-177	**175**	**5**	17	22,73	77,27
5	178-182	**180**	**4**	21	18,18	95,45
6	183-187	**185**	**1**	22	4,55	100
skupaj	/	/	22	/	100	/











10.3 Statistični parametri

V praksi uporabljamo več statističnih parametrov, ki jih izračunamo nad vzorčnimi izidi. Če je vzorec dovolj dober, potem lahko dobljene rezultate posplošimo na celo populacijo, pri čemer pa vedno dopuščamo določena odstopanja. V formulah je n število vseh vzornih izidov, k pa število razredov (uporabno takrat, ko razredi obstajajo).

1. **Srednja vrednost (poprečje)**

   $$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (f_i \cdot x_i)$$

2. **Disperzija (varianca)**

   $$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2) = (\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \bar{x}^2 = (\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i^2) - \bar{x}^2$$

   Koren disperzije imenujemo **standardna deviacija** oz. **standardni odklon**.

   V povezavi z disperzijo zasledimo tudi formulo:

   $$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2)$$

   To je **cenilka za disperzijo**. To formulo uporabljamo takrat, ko ocenjujemo disperzijo za celotno populacijo na osnovi vzorca.

3. **Mediana**

   Mediana $\tilde{x}$ je vrednost tistega izida, ki leži na sredini, če vse izide naštejemo po velikosti. Če je število izidov sodo, je mediana poprečje obeh vrednosti na sredini.

4. **Razpon**

   Razpon R je razlika med največjim in najmanjšim izidom: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

5. **Modalna vrednost**

   Modalna vrednost D je srednja vrednost tistega razreda, v katerem je največ izidov.

Primer:

Za rezultate glede velikosti fantov iz prejšnjega primera dobimo naslednje statistične parametre:

$$\bar{x} = \frac{1}{22} \cdot (1 \cdot 160 + 4 \cdot 165 + 7 \cdot 170 + 5 \cdot 175 + 4 \cdot 180 + 1 \cdot 185) = \frac{1}{22} \cdot 3790 = 172,27$$

$\sigma^2 = 38,02$, $\sigma = 6,17$

$s^2 = 39,83$, $s = 6,31$

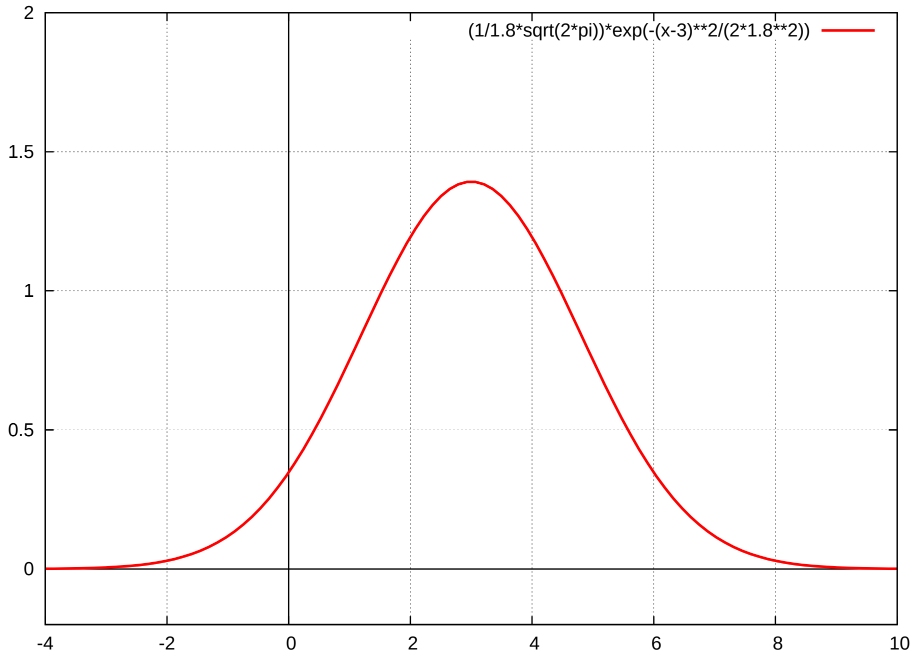
$\tilde{x} = 170$

$R = 185 - 160 = 25$

$D = 170$

10.4 Porazdelitvene funkcije

Če so izidi poskusa oz. pojava realna števila jih lahko opišemo s porazdelitveno funkcijo. Pri tem v splošnem ne uporabljamo grupiranja v razrede.



Skupna ploščina pod porazdelitveno funkcijo je enaka 1.

Verjetnost, da bo izid manjši od a je enaka ploščini od $-\infty$ do a.

Verjetnost, da bo izid med a in b je enaka ploščini od a do b.

Nekatere pomembne porazdelitve:

- pri **enakomerni porazdelitvi** so vsi izidi enako verjetni,
- pri **eksponentni porazdelitvi** so manjši izidi bolj verjetni od večjih,
- pri **normalni porazdelitvi** so izidi blizu poprečja bolj verjetni od tistih, ki so dlje od poprečja,
- **lognormalne** in druge porazdelitve so nesimetrične porazdelitve, pri katerih so izidi v bližini neke točke bolj verjetni od izidov, ki so dlje od te točke, vendar pa za razliko od normalne porazdelitve najbolj verjetni izid ni enak poprečju.

Poskuse iz realnega življenja zelo pogosto preučujemo s pomočjo normalne porazdelitve.

V splošnem je krivulja, ki določa normalno porazdelitev, podana z naslednjo funkcijo:

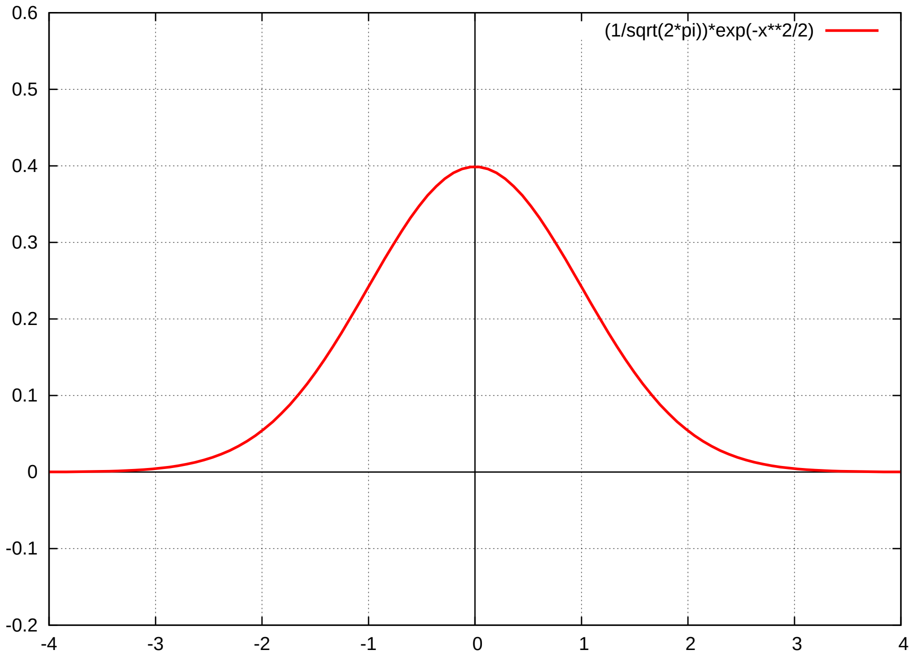
$$p(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Za normalne porazdelitve veljajo naslednje zakonitosti:

- najbolj verjetna vrednost je a, ki je hkrati tudi pričakovano poprečje izidov,
- za 68,3 % vseh izidov velja, da ležijo na intervalu $a \pm \sigma$,
- za 95,4 % vseh izidov velja, da ležijo na intervalu $a \pm 2 \cdot \sigma$,
- za 99,7 % vseh izidov velja, da ležijo na intervalu $a \pm 3 \cdot \sigma$.

Če je $a = 0$ in $\sigma = 1$, potem dobimo normirano normalno porazdelitev. Graf normirane normalne porazdelitve je Gaussova krivulja, katere enačba je:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



Za označevanje ploščine pod Gaussovo krivuljo vpeljemo funkcijo Φ. Velja, da je $\Phi(a)$ enak ploščini od $-\infty$ do a. Vrednosti za Φ dobimo iz tabel.

10.5 Test hi-kvadrat (χ^2)

Imamo rezultate nekega poskusa in zanima nas, ali statistično pomembno odstopajo (oz. se prilagajajo) pričakovanim izidom.

Postopek za test hi-kvadrat je naslednji:

1. Oblikujemo razrede tako, da število pričakovanih izidov v nobenem razredu ni manjše od 5.
2. Naredimo tabelo in za vsak izid izračunamo: $\dfrac{(x_i - x_i^\star)^2}{x_i^\star}$, kjer je x_i izmerjeni x_i in $x_i^\star$ pravi x_i.
3. Izračunamo $\chi^2 = \sum \dfrac{(x_i - x_i^\star)}{x_i^\star}$ in ga primerjamo z vrednostjo $\chi^2_{m=k-1}$ iz tabele.

Primer:

60 krat vržemo kocko in zabeležimo število pik. Ali je kocka poštena? V tabeli najdemo rezultat, da je pri 95 % zanesljivosti testa vrednost $\chi^2_{m=5} = 1,15$.

št. pik	x_i	$x_i^\star$	$x_i - x_i^\star$	$\dfrac{(x_i - x_i^\star)^2}{x_i^\star}$
1	8	10	-2	0,4
2	7	10	-3	0,9
3	11	10	1	0,1
4	10	10	0	0
5	11	10	1	0,1
6	13	10	3	0,9
vsota	60	60	/	$\chi^2 = 2,4$

Dobljeni $\chi^2 = 2,4 > 1,15$, kar pomeni, da rezultati naše kocke statistično pomembno odstopajo od pričakovanih rezultatov poštene kocke!

10.6 Preizkus normalne porazdelitve

V osnovi je preizkus normalne porazdelitve podoben testu χ^2. Za razliko od tam pa tukaj nimamo podanih vrednosti $x_i^\star$ (oz. jih ne moremo določiti s preprosto kombinatoriko), ampak jih moramo izračunati. Ta izračun poteka tako, da določimo poprečje in standardni odklon normalne porazdlitve, ki se najbolj prilega podanim podatkom. V drugem koraku potem s pomojo testa χ^2 poskušamo ovreči hipotezo, da se podane vrednosti statistično nepomembno razlikujejo od vrednosti najbolje se prilegajoče normalne porazdelitve. Teorija pravi, da moramo v tem testu izračunani χ^2 primerjati z vrednostjo v tabeli $\chi^2_{m=k-3}$.

Primer:

Na kolokviju so študenti dosegli različne rezultate. Ugotovi, ali rezultati statistično pomembno odstopajo od normalne porazdelitve.

razred	x_i	$\frac{\max_i - \bar{x}}{s}$	Φ	p_i	$x_i^\star = n \cdot p_i$	$x_i - x_i^\star$	$\frac{(x_i - x_i^\star)^2}{x_i^\star}$
1-10	?						
11-20	?						
21-30	?						
31-40	?						
41-50	?						
51-60	?						
61-70	?						
71-80	?						
81-90	?						
91-100	?						
	n = ...	/	/	/	/	/	$\chi^2 = \ldots$

Pri vpisovanju v tabelo upoštevamo naslednje nasvete:

- Sosednje razrede po potrebi združimo tako, da število izidov v nobenem razredu ni manjše od 5.
- V stolpec Φ vnesemo številko iz tabele Normirana normalna porazdelitev, ki pripada vrednosti v stolpcu $\frac{\max_i - \bar{x}}{s}$. Če je število v levem stoplcu negativno, poiščemo v tabeli vrednost za pozitivno število in vpišemo 1 minus najdeno število.
- V stolpec p_i vpisujemo razlike med dvema sosednjima vrednostima za Φ.
- Če smo združili razrede računamo za vsakega posebej, na koncu pa seštejemo vrednosti v stolpcu x_i in v stolpcu $x_i^\star = n \cdot p_i$.
- Dobljeno vrednost χ^2 primerjamo z vrednostjo χ^2_m iz tabele, pri čemer je m enak številu razredov minus 3 (potrebno je upoštevati morebitno združevanje razredov). Če je izračunana vrednost manjša od tiste v tabeli, potem test ni zaznal statistično pomembnega odstopanja od normalne porazdelitve.

$\bar{x} = \ldots$

$s^2 = \ldots$

$s = \ldots$

$\chi^2_{m=?} = \ldots$

10.7 Testiranje vpliva

Dokazati ali ovreči vpliv enega pojava na drugega je zelo pomembna naloga statistike. Npr. ali kajenje povzroča rak na pljučih? Ali starost voznika vpliva na število prometnih prekrškov? Ali višina očeta vpliva na višino otroka? Ali izvajanje predpisanega treninga prispeva k boljšim športnim rezultatom?

Testiranje vpliva je v osnovi test, s katerim preverimo, da imata dva vzorca enako poprečje. Uporabljamo ga lahko tudi za majhne vzorce, število elementov mora biti vsaj 10. Vzorca v splošnem izberemo tako, da v eni skupini nek pojav nastopa, v drugi pa ne. Na primer, v enem vzorcu so kadilci, v drugem pa nekadilci. Ali pa so v enem vzorcu tisti, ki so trenirali, v drugem pa tisti, ki niso trenirali.

Obstajata dve obliki testa, razlikujeta se glede na to, ali je število elementov v obeh vzorcih enako ali različno. Ogledali si bomo le prvo možnost, ki je lažja. Omenimo še, da opisani test velja le, če se disperziji prve in druge populacije ne razlikujeta za več kot 4-krat. V praksi disperzija nobene populacije ni natančno znana, zato moramo biti pri tolmačenju rezultata previdni.

Postopek za testiranje vpliva je naslednji:

1. Izračunamo $s_d = \sqrt{\dfrac{s_x^2 + s_y^2}{n}}$, kjer sta $\bar{x}$ in $\bar{y}$ poprečji vzorcev, s_x^2 in s_y^2 cenilki za disperzijo, n pa število elementov v vsakem od vzorcev.
2. Izračunamo $t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_d}$ in ga primerjamo z vrednostjo $t_{m=2n-2}$ iz tabele Studentova porazdelitev. Hipotezo o enakih poprečjih zavrnemo, če je absolutna vrednost izračunanega t večja od tiste v tabeli.

Naloge:

▲ Študenti so pisali 2 kolokvija. Zanima nas, ali so rezultati obeh kolokvijev enako dobri. Ta naloga eksplicitno zahteva, da primerjamo poprečji dveh vzorcev.

x	92	40	15	100	50	36	60	45	55	95
y	80	60	44	74	94	74	60	80	45	45

▷ Imamo $n = 10$. Izračunamo naslednje vrednosti:

$$\bar{x} = 58,8, \qquad \bar{y} = 65,6$$

$$s_x^2 = \frac{1}{9} \cdot (33,2^2 + 18,8^2 + 43,8^2 + 41,2^2 + 8,8^2 + 22,8^2 + 1,2^2 + 13,8^2 + 3,8^2 + 36,2^2) = 798,4$$

$$s_y^2 = \frac{1}{9} \cdot (14,4^2 + 5,6^2 + 21,6^2 + 8,4^2 + 28,4^2 + 8,4^2 + 5,6^2 + 14,4^2 + 20,6^2 + 20,6^2) = 304,5$$

$$s_d = \sqrt{\frac{798,4 + 304,5}{10}} = 10,5, \qquad t = \frac{58,8 - 65,6}{10,5} = -0,647$$

▷ Iz tabel v stolpcu za 5% tveganje razberemo $t_{m=18} = 2,10$, torej je absolutna vrednost izračunanega t manjša od tistega v tabeli.

Test kaže, da hipoteze o enakih poprečjih ne moremo zavreči z dovolj veliko zanesljivostjo. Študenti so kot skupina na obeh kolokvijih dosegli podobne rezultate, kar pa ne pomeni, da je vsak posamezen študent dosegel podoben rezultat. Lahko pa sklepamo, da jih je učitelj za oba kolokvija pripravil enako dobro oz. da sta bila oba enako težka.

▲ Razred 20 otrok razdelimo na dve enaki skupini. Pri obeh opravimo preizkus telesne gibljivosti. Rezultai tega preizkusa je ocena, ki je realno število. Nato naslednjih pol leta ena skupina otrok sistematično hodi na treninge in tam izvaja doloene vaje. Druga skupina teh treningov nima. ez pol leta spet izmerimo telesno gibljivost. Opazimo lahko, da so vsi otroci napredovali, saj rastejo. Zanima pa nas, ali je trening kaj vplival na telesno gibljivost otrok.

Rezultati za otroke iz skupine, ki ni trenirala.

začetna telesna gibljivost	$8,3$	6	$3,3$	6	$7,6$	2	$6,3$	4	$4,3$	$3,6$
končna telesna gibljivost	9	6	$3,6$	7	8	$2,3$	7	$4,3$	$4,6$	4
razlika	$0,7$	0	$0,3$	1	$0,3$	$0,3$	$0,7$	$0,3$	$0,3$	$0,4$

Rezultati za otroke iz skupine, ki je trenirala.

začetna telesna gibljivost	6	$5,3$	$5,6$	$4,6$	6	3	$6,3$	$2,6$	2	7
končna telesna gibljivost	7	9	$6,6$	$5,3$	$7,3$	$5,3$	8	4	2	9
razlika	1	$3,7$	1	$0,7$	$1,3$	$2,3$	$1,7$	$1,4$	0	2

▷ Pri tej nalogi uprabljamo le razliko, saj nas zanima napredek in ne absolutne vrednosti.

Imamo $n = 10$. Izračunamo naslednje vrednosti:

$\bar{x} = 0,43$

$\bar{y} = 1,51$

$s_x^2 = 0,0823$

$s_y^2 = 1,0232$

$$s_d = \sqrt{\frac{0,0823 + 1,0232}{10}} = 0,3325$$

$$t = \frac{0,43 - 1,51}{0,3325} = -3,2481$$

Iz tabel razberemo $t_{m=18} = 2,10$, torej je absolutna vrednost izračunanega t večja od tistega v tabeli. Test kaže, da lahko hipotezo o enakih poprečjih z veliko zanesljivostjo završemo (iz tabele smo vzeli tako vrednost, da je tveganje za napako manj kot 5%). Zaključimo lahko, da je trening vplival na rezultate otrok.

POGLAVJE 11

OPTIMIZACIJA

Matematični priročnik, str. 17-22, 679-693

11.1 Matematične neenačbe

V neenačbah za razliko od enačb namesto znaka $=$ nastopajo znaki $<$, $\leq$, $>$in $\geq$. Rešitev ene matematične neenačbe je interval.

Primer :

$3x^2 - 5 < x + 10$

Neenačbo preoblikujemo na podoben način kot enačbo. Paziti moramo le pri množenju obeh strani z negativnim številom. V tem primeru se neenačaj obrne.

$3x^2 - 5 < x + 5$

$3x^2 - x - 10 < 0$

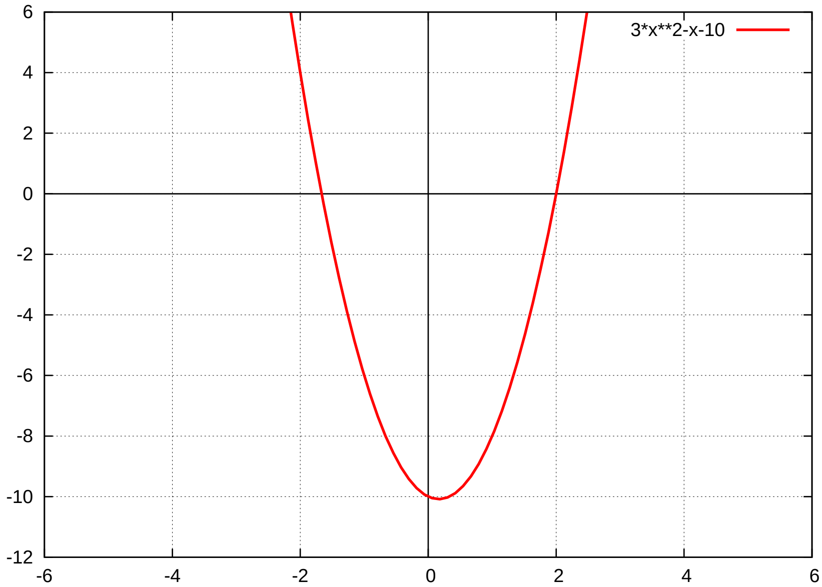
Sedaj skiciramo graf funkcije $f(x) = 3x^2 - x - 10$ in ugotovimo, za katere x so vrednosti funkcije manjše od 0. Ker moramo poiskati ničle funkcije, neenačbo spremenimo v enačbo.

$3x^2 - x - 10 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3\cdot 10}}{6}$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{121}}{6} = -\frac{5}{3} = -1,66$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{121}}{6} = 2$



Rešitev neenačbe: $x \in (-\frac{5}{3}, 2)$.

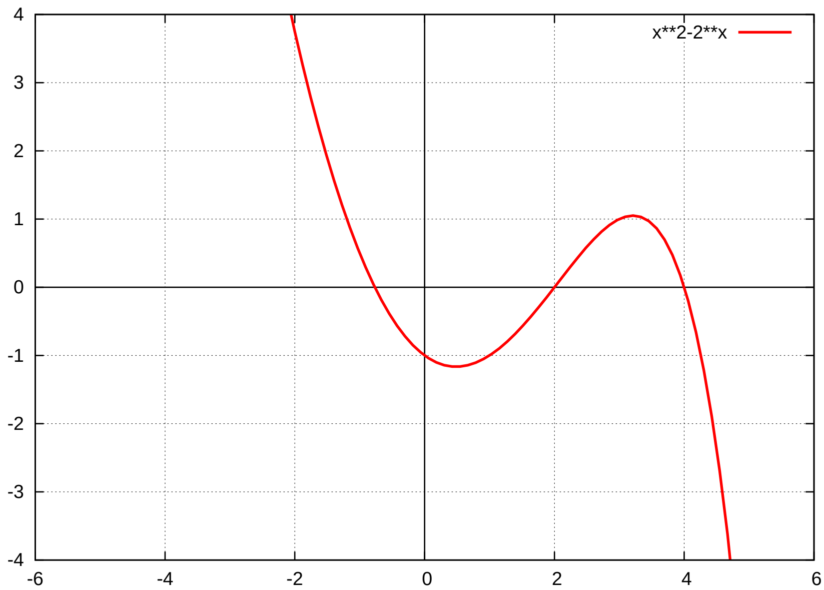
Tukaj je še en primer:

$x^2 \leq 2^x$

Če rešujemo po enakem postopku kot zgoraj dobimo:

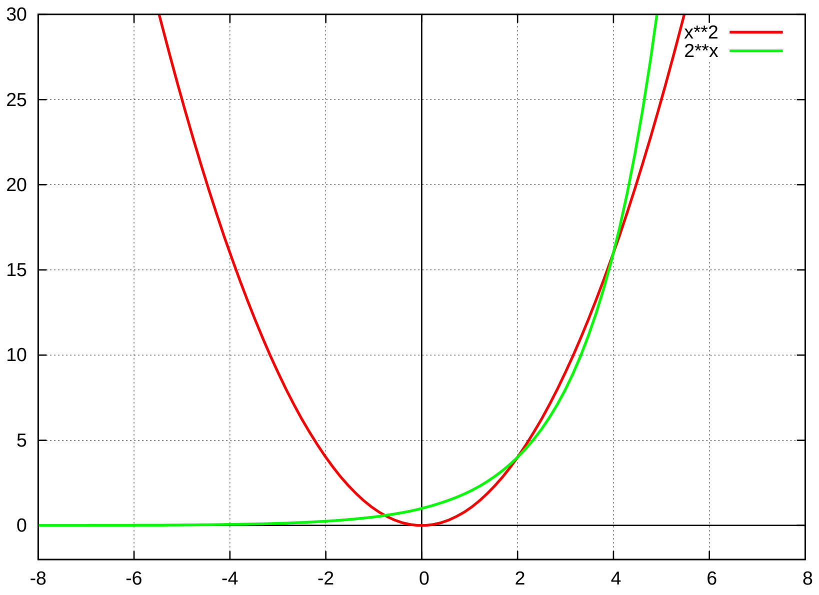
$x^2 - 2^x \leq 0$

Skiciramo graf funkcije (predpostavimo, da imamo računalnik!)



Iz grafa razberemo, da je rešitev neenačbe sestavljena iz 2 intervalov. Natančne meje teh dveh intervalov dobimo, če poiščemo ničle funkcije $x^2 - 2^x = 0$. Iz grafa vidimo, da ima funkcija tri ničle, eno v okolici točke -1, drugo v okolici točke $+2$ in tretjo v okolici točke $+4$.

Namesto zgornjega grafa, za risanje katerega potrebujemo računalnik, lahko skiciramo posebej levo in posebej desno stran neenačbe. To pa znamo tudi brez računalnika.



Namesto ničel sedaj iščemo presečišča obeh funkcij.

Za drugo in tretje presečišče hitro ugotovimo, da sta enaki $+2$ in $+4$, saj velja:

$2^2 = 2^2$

$4^2 = 2^4$

Za iskanje presečišča v okolici točke -1 uporabimo Newtonovo metodo iz numerične matematike.

$f(x) = x^2 - 2^x$

$f'(x) = 2x - 2^x \cdot \ln 2$

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-2^x}{2x-2^x \cdot \ln 2}$

$x_0 = -1$

$x_1 = g(x_0) = -1 - \frac{(-1)^2-2^{-1}}{2\cdot(-1)-2^{-1}\cdot\ln 2} = -0,786923367$

$x_2 = g(x_1) = -(-0,786923367) - \frac{(-0{,}786923367)^2-2^{-0{,}786923367}}{2\cdot(-0{,}786923367)-2^{-0{,}786923367}\cdot\ln 2} = -0,766843379$

$x_3 = -0,766664710$

$x_4 = -0,766664696$

Rešitev neenačbe je unija dveh intervalov in sicer: $x = [-0,766664696, 2] \cup [4, \infty)$.

11.2 Sistemi linearnih neenačb

Sistemi linearnih enačb so podobni sistemom linearnih enačb, le da namesto znaka $=$ nastopajo znaki $<$, $\leq$, $>$in $\geq$.

Rešitev sistema linearnih neenačb je množica točk v prostoru dimenzije, ki je enaka številu neznank. Rešujemo jih tako, da rešimo vsako neenačbo posebej in potem tvorimo presek vseh dobljenih množic točk.

Rešitev sistema linearnih neenačb z dvema neznankama je množica točk v ravnini. Rešimo ga lahko tako, da tvorimo rešitev za vsako neenačbo posebej in potem naredimo presek med dobljenimi polravninani. Učinkovito to naredimo s pomočjo grafov v koordinatnem sistemu.

Kot primer rešimo naslednji sistem neenačb:

$4x + 3y < 8$

$3x - 2y \geq 0$

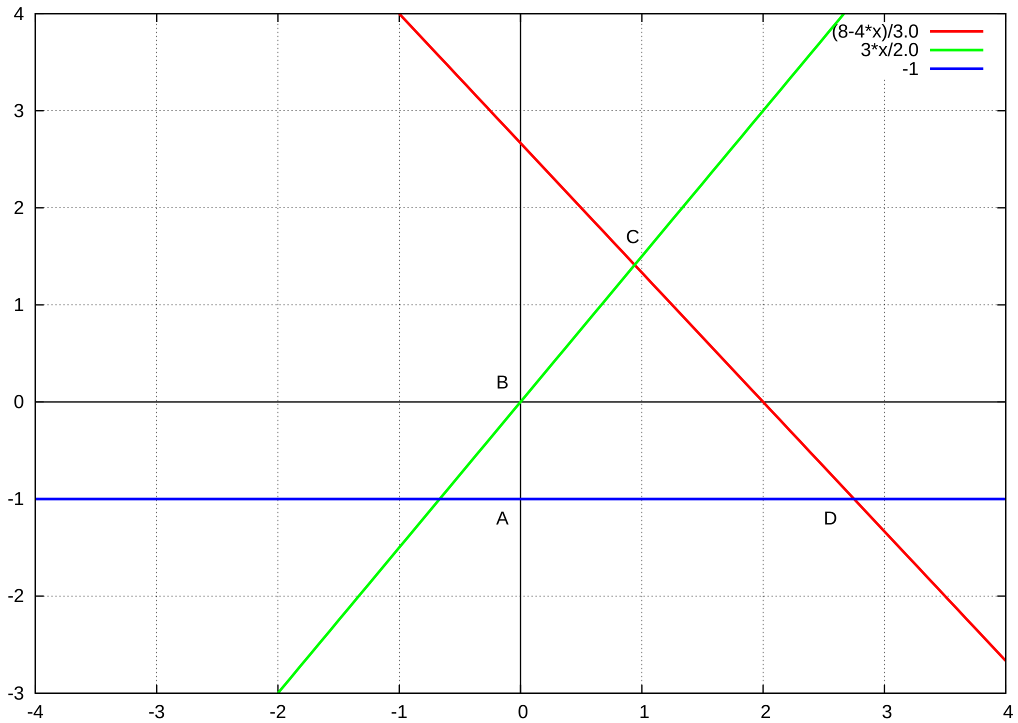
$x > 0$

$y \geq -1$

Prvi dve neenačbi pretvorimo v obliko $y = f(x)$.

$y < \frac{8-4x}{3}$

$y \leq \frac{3x}{2}$



Rešitev neenačbe so vse točke v mnogokotniku (v tem primeru v štirikotniku), ki ga omejujeo narisane premice. Če želimo ta mnogokotnik podrobneje opredeliti, izračunamo njegova oglišča.

Oglišče A: Iz slike preberemo koordinati $(0, -1)$.

Oglišče B: Iz slike preberemo koordinati $(0, 0)$.

Oglišče C: Je presečišče premice $y = \frac{3x}{2}$ in premice $y = \frac{8-4x}{3}$.

$\frac{3x}{2} = \frac{8-4x}{3}$

$9x = 16 - 8x$

$x = \frac{16}{17} = 0,941$

$y = \frac{3 \cdot \frac{16}{17}}{2} = \frac{48}{34} = \frac{24}{17} = 1,412$

Oglišče C ima koordinati $(0,941, 1,412)$.

Oglišče D: Je presečišče premice $y = \frac{8-4x}{3}$ in premice $y = -1$.

$y = \frac{8-4x}{3}$

$3y = 8 - 4x$

$x = \frac{8-3y}{4} = \frac{8-3\cdot(-1)}{4} = \frac{11}{4} = 2,75$

Oglišče D ima koordinati $(2,75, -1)$.

11.3 Linearna optimizacija

Pri linearni optimizaciji iščemo maksimum **namenske funkcije**, ki je podana kot utežena vsota n spremenljivk ob pogoju, da je vrednost vseh spremenljivk večja ali enaka nič in da je izpolnjen dan sistem linearnih enačb in neenačb z n spremenljivkami, ki jih imenujemo **omejitve**. Če problem zahteva iskanje minimuma namenske funkcije, potem jo pomnožimo z -1 in poiščemo maksimum.

Namensko funkcijo zapišemo kot:

$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$

Omejitve, ki so sestavljene iz s neenačb in $m - s$ enačb, zapišemo kot:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

$\sum a_{i,j} \cdot x_j \leq b_i, i \in [1, s], j \in [1, n]$

$\sum a_{i,j} \cdot x_j = b_i, i \in [s+1, m], j \in [1, n]$

Vsako rešitev, ki zadosti omejitvam, imenujemo **dopustna rešitev**. Rešitev, pri kateri ima namenska funkcija maksimum, pa imenujemo **optimalna rešitev**.

Omejitve tvorijo množico točk v n-dimenzionalnem prostoru, ki jo imenujemo **dopustno območje** in si ga lahko predstavljamo kot n-dimenzionalno telo, ki pa ni nujno omejeno z vseh strani. Optimalna rešitev problema linearne optimizacije se vedno nahaja v vsaj enem od ogljišč tega telesa. Ogljišč je lahko zelo veliko. V splošnem vsaka neenačba poveča število ogljišč, medtem ko vsaka enačba zmanjša število ogljišč.

Točka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ogljišče dopustnega območja, če velja, da nobene vrednosti ne moremo povečevati oz. zmanjševati, ne da bi prekršili omejitve.

Primer:

Poišči maksimum funkcije $z = x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3$ ob predpostavki, da so vrednosti vseh spremenljivk nenegativna števila in da so izpolnjene naslednje omejitve:

$x_1 - x_2 \geq 10$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$

$x_3 - x_2 = 5$

Vidimo, da so omejitve podane z dvema neenačbama in eno enačbo. Da bi prva enačba ustrezala definiciji problema, moramo obrniti neenačaj. To storimo tako, da jo pomnožimo z -1 in dobimo:

$-x_1 + x_2 \leq -10$

Z ugibanjem lahko najdemo dopustni rešitvi:

$x_1 = 12, x_2 = 1, x_3 = 6$

$x_1 = 13, x_2 = 0,5, x_3 = 6,5$

Če vstavimo vrednosti v namensko funkcijo dobimo $z_1 = 12 + 5 \cdot 1 + 6 = 23$ in $z_2 = 13 + 5 \cdot 0,5 + 6,5 = 22$. Torej je prva rešitev boljša od druge.

Po premisleku ugotovimo, da prva točka ni ogljišče, saj lahko vrednosti še povečujemo. Povečajmo npr. x_1 na 13. Več ne gre, ker je lahko vsota vseh treh števil največ 20. Vrednost namenske funkcije v dobljeni točki je enaka 24. Seveda pa na osnovi tega izračuna ne moremo trditi, da je to tudi optimalna rešitev. Zanima nas postopek, kako bi našli optimalno rešitev.

Metoda simpleksov

V splošnem lahko optimalno rešitev najdemo tako, da pregledamo vsa ogljišča dopustnega območja. Ker jih je veliko, jih ne pregledujemo naključno, ampak v nekem smiselnem vrstnem redu, ki kolikor je mogoče hitro vodi k rešitvi. To imenujemo medoda simpleksov (avtor George Dantzig, 1947). Da bi lahko uporabili metodo simpleksov, je potrebno problem pretvoriti v **normalno obliko**.

Problem linearne optimizacije je v normalni obliki, če so namenska funkcija in omejitve podane z formulami naslednje oblike:

$z = c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{n-m} \geq 0, x_{n-m+1} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$

$\sum a_{i,j} \cdot x_j + x_{n-m+i} = b_i, i \in [1, m], j \in [1, n-m]$

Pri normalni obliki linearne optimizacije velja:

1. vse neenačbe so podane v obliki $x_i \geq 0$,
2. v vsaki enačbi je ena spremenljivka taka, da se ne pojavlja v nobeni drugi in ni pomnožena z nobenim koeficientom (pred njo mora biti znak $+$), te spremenljivke imenujemo **bazne spremenljivke**,
3. v vseh enačbah so na desni strani nenegativna števila,
4. v namenski funkciji ne nastopajo bazne spremenljivke.

Pri normalni obliki velja, da je točka $(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_{n-m} = 0, x_{n-m+1} = b_1, x_{n-m+2} = b_2, \ldots, x_n = b_m)$ eno od ogljišč dopustnega območja danih omejitev.

Problema linearne optimizacije v splošnem ni enostavno pretvoriti v normalno obliko. Potrebni so naslednji koraki:

1. Vse neenačbe dopolnimo z **dopolnimi spremenljivkami** tako, da dobimo enačbe.
2. Če ne dobimo normalne oblike je potrebno enačbe preoblikovati ali pa vpeljati še dodatne spremenljivke, ki jih imenujemo **umetne spremenljivke**.
3. Namensko funkcijo moramo preoblikovati tako, da ne vsebuje baznih spremenljivk.

V nadaljevanju se posvetimo le problemom, pri katerih je mogoče normalno obliko dobiti na dovolj enostaven način brez dodajanja umetnih spremenljivk.

Metodo simpleksov bomo razložili na problemu iz prejšnega primera.

Najprej pretvorimo problem v normalno obliko.

$-x_1 + x_2 \leq -10$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$

$x_3 - x_2 = 5$

K neenačbam dodamo dopolnilne spremenljivke in dobimo:

$-x_1 + x_2 + x_4 = -10$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20$

$x_3 - x_2 = 5$

Zadnja enačba nima nobene take spremeljivke, ki se ne pojavlja v ostalih. Zato izrazimo x_3 in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo:

$-x_1 + x_2 + x_4 = -10$

$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 15$

$x_3 - x_2 = 5$

Ker je na desni strani prve enačbe negativno število, pomnožimo prvo enačbo z -1. Dobimo:

$x_1 - x_2 - x_4 = 10$

Ker je pred spremenljivkama x_2 in x_4 v tej enačbi znak $-$, je edina možna bazna spremenljivka x_1. Zato odstranimo x_1 iz druge enačbe tako, da od nje odštejemo prvo enačbo. Dobimo:

$x_1 - x_2 - x_4 = 10$

$3 \cdot x_2 + x_4 + x_5 = 5$

$x_3 - x_2 = 5$

Enačbe še nekoliko preoblikujemo in zamenjamo:

$-x_2 - x_4 + x_1 = 10$

$-x_2 + 0 \cdot x_4 + x_3 = 5$

$3 \cdot x_2 + x_4 + x_5 = 5$

Dobili smo normalno obliko, v kateri so bazne spremenljivke x_1, x_3 in x_5.

Sedaj moramo preoblikovati še namensko funkcijo. Postopek je naslednji:

$z = x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3$

V namenski funkciji nastopata bazni spremenljivki x_1 in x_3. Zato iz prve in druge enačbe izrazimo ti dve spremenljivki in vstavimo v namensko funkcijo. Dobimo:

$z = (10 + x_2 + x_4) + 5 \cdot x_2 + (5 + x_2) = 7 \cdot x_2 + x_4 + 15$

Začetno ogljišče , ki ga bomo uporabili v metodi simpleksov, je točka $(x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 0, x_5 = 5)$. Vrednost namenske funkcije v tej točki je 15.

V nadaljevanjuje enačbe pretvarjamo iz ene oblike v drugo tako, da rešitev v vsakem koraku izboljšamo. Ta preoblikovanja nazorno izvajamo s pomočjo tabele, v kateri so v vrsticah naštete bazne spremenljivke, v stolpcih pa ostale spremenljivke. Začetna tabela simpleksov v tem primeru je naslednja:

	x_2	x_4	
x_1	-1	-1	10
x_3	-1	0	5
x_5	3	1	5
	7	1	15

Sedaj si oglejmo dobljeno tabelo. Možni so naslednji trije primeri:

1. Vse vrednosti v spodnji vrstici razen vrednosti v desnem spodnjem vogalu so negativne ali enake nič. V tem primeru smo našli optimalno rešitev.

2. V tabeli je v spodnji vrstici vrednost, ki je večja od nič, hkrati pa so vse vrednosti v stolpcu nad njo negativne ali enake nič. V tem primeru namenska funkcija ni omejena in z večanjem vrednosti spremenljivke, ki pripada temu stolpcu neomejeno narašča.

3. Če ne velja nobeden od zgornjih primerov, potem obstaja optimalna rešitev, vendar je še nismo dosegli.

V našem primeru velja točka 3, zato moramo tabelo preoblikovati tako, da se premaknemo v ogljišče, v katerem ima namenska funkcija večjo vrednost od vrednosti v trenutnem ogljišču.

Za preoblikovanje tabele simpleksov uporabljamo naslednja pravila:

1. Izberemo eno od baznih spremenljivk, pri kateri je v spodnji vrstici vrednost večja od nič in jo označimo z x_q.

2. V stolpcu, ki pripada x_q, vse vrednosti, ki so večje od nič, delimo z vrednostjo, ki je zapisana v isti vrstici v desnem stolpcu. Zapomnimo si, pri kateri vrstici smo dobili najmanjši rezultat. Spremenljivko, ki se nahaja v tej vrstici, označimo z x_p.

3. Spremenljivki x_q in x_p med seboj zamenjamo. Pri tem moramo ustrezno spremeniti tabelo po naslednjih pravilih:

   - polje, ki je na križišču izbranega stolpca in izbrane tabele, imenujemo pivot,
   - namesto pivota vpišemo njegovo recipročno vrednost,
   - vsa polja v izbrani vrstici, razen pivota, pomnožimo z recipročno vrednostjo pivota,
   - vsa polja v izbranem stolpcu, razen pivota, pomnožimo z negirano recipročno vrednostjo pivota,
   - od vseh ostalih polj odštejemo produkt treh vrednosti: recipročne vrednosti pivota, stare vrednosti, ki leži v isti vrstici kot je polje in v istem stolpcu kot je pivot, ter stare vrednosti, ki leži v istem stolpcu kot je polje in v isti vrstici kot je pivot.

V našem primeru izberimo stolpec s spremenljivko x_2. Edina vrednost v tem stolpcu, ki je večja od nič, je v vrstici s spremenljivko x_5, zato izberemo to vrstico. Pivot je število 3. Po preoblikovanju tabele simpleksov dobimo:

	x_5	x_4	
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{35}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0

V spodnji vrstici so vsa števila manjša od nič, zato smo dobili optimalno rešitev, ki pa jo moramo znati prebrati. To je enostavno, saj spremenljivkam v vrsticah pripadajo vrednosti v desnem stolpcu, spremenljivke v stolpcih pa so enake 0.

Optimalna rešitev danega problema se torej glasi: $x_1 = \frac{35}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$ in $x_3 = \frac{20}{3}$. Vrednost namenske funkcije v tej točki je $\frac{80}{3} = 26,66$.

11.4 Primeri nalog s področja optimizacije

Pri večini nalog iz optimizacije so veljavne le celoštevilske rešitve. Če jih rešujemo z metodo, ki tega ne upošteva, je na koncu potrebno poiskati najbližjo celoštevilsko rešitev. V splošnem se lahko zgodi, da optimalna celoštevilska rešitev ni v bližini optimalne realne rešitve in takrat optimalno rešitev zgreimo.

Vse probleme s področja optimizacije lahko rešimo po metodi simpleksov. Vendar pa je za večino problemov ta metoda preveč zamudna, zato so se razvile namenske metode in posebni računalniški algoritmi za reševanje posameznih problemov, s katerimi se izognemo tudi problemom z realnimi števili.

1. Problem največjega dobička

   V podjetju izdelujemo izdelke A, B, C, ... Sestavljeni so iz enakih materialov, vendar v različni količinah. Izdelki prinašajo različen dobiček. Materiale označimo z M1, M2, ..., Mn. V skladišču imamo dano količino vsakega materiala. Katere izdelke naj naredimo in koliko vsakega, da bomo imeli največji dobiček. V splošnem ni nujno najboljše, da izdelamo največje možno število najboljših izdelkov, ker nam lahko enega mateiala zmanjka, iz ostalih pa se ne da nič več narediti.

   Primer:

   V skladišču imamo 630 enot materiala M1, 620 enot materiala M2 in 350 enot materiala M3. Za izdelek A potrebujemo 12 enot M1 in 8 enot M2. Za izdelek B pa potrebujemo 6 enot M1, 12 enot M2 in 10 enot M3. Vsak izdelek A nam prinese 20 enot dobička, vsak izdelek B pa prinese 60 enot dobička. Koliko izdelkov A in koliko izdelkov B naj naredimo, da bomo imeli največji dobiček?

2. Transportni problem

   Imamo več skladišč nekega izdelka, označimo jih s S1, S2, ..., Sm. V vsakem od njih je različna količina tega izdelka. Imamo tudi več kupcev tega izdelka, označimo jih z K1, K2, ..., Kn. Izdelke moramo iz skladišč razvoziti do kupcev tako, da v celoti izpraznimo skladišča. Za vsak par (skladišče, kupec) poznamo ceno prevoza. Kako naj razvozimo izdelke, da bo skupna cena transporta čim manjša. Najboljše je seveda, da vsakemu uporabniku pripeljemo iz čim bližjega skladišča, vendar pa se lahko pojavi problem, da je v najbližjem skladišču premalo izdelkov ali pa jih je preveč in jih moramo peljati še nekam drugam.

   Primer:

   V skladišču S1 je 100 izdelkov, v skladišču S2 pa 200 izdelkov. Imamo tri kupce, kupec K1 želi 50 izdelkov, kupec K2 želi 100 izdelkov, kupec K3 pa želi 150 izdelkov. Cene transporta so naslednje: (S1,K1) = 10 enot, (S1, K2) = 8 enot, (S1,K3) = 12 enot, (S2,K1) = 15 enot, (S2, K2) = 8 enot in (S2, K3) = 6 enot. Kako naj razvozimo izdelke, da bo skupna cena transporta čim manjša?

3. Problem razporeda

   Potrebujemo več storitev, na voljo pa imamo tudi enako število ponudnikov. Ponudniki različne storitve ponujajo po različnih cenah. Želimo, da vsak ponudnik za nas izvede natanko eno storitev. Zanima nas, katero storitev naj prevzame posamezni ponudnik, da bo skupna cena čim manjša.

   Primer:

   Potrebujemo storitve S1, S2 in S3. Na voljo imamo ponudnike P1, P2 in P3, ki lahko izvedejo katerokoli od potrebnih storitev. Cene ponudnikov so prikazane v spodnji matriki. Katere storitve naj prevzame posamezen ponudnik, da bo skupna cena čim manjša?

.	P1	P2	P3
S1	5	6	7
S2	3	4	4
S3	6	7	8

4. Problem optimizacije proizvodnje

   Potrebno je izdelati več različnih izdelkov v različnih količinah. Na razpolago imamo različno zmogljive stroje. Za vsak par (izdelek, stroj) je podani čas izdelave in strošek izdelave. Čas uporabe posamezih strojev je omejen. Zanima nas, na katerih strojih naj izdelke izdelujemo, da bo skupni strošek čim manjši.

   Primer:

   Potrebno je izdelati 100 kosov izdelka A, 100 kosov izdelka B in 200 kosov izdelka C. Na voljo imamo dva stroja. Na starejšem stroju S1 traja izdelava izdelka A 4 ure, izdelava izdelka B 2 uri, izdelava izdelka C pa 4 ure. Na novejšem stroju S2 pa traja izdelava izdelka A 2 uri, izdelava izdelka B tudi 2 uri, izdelava izdelka C pa 3 ure. Starejši stroj smemo uporabljati 1000 ur, novejši stroj pa le 300 ur. Na starejšem stroju je za vsak izdelek strošek izdelave toliko enot, kot je potebnih ur za izdelavo. Na novejšem stroju pa je pri izdelku B in C strošek za eno enoto večji kot je število ur za izdelavo. Na katerih strojih naj izdelamo izdelke, da bo skupni strošek čim manjši?

5. Problem strežbe

   Potrebno je obdelati več različnih izdelkov. Na voljo imamo več različnih strojev za obdelavo. Za vsak par (izdelek, stroj) je podani čas, ki je potreben za obdelavo. Na vsakem stroju lahko naenkrat obdelujemo le en izdelek. Zanima nas, koliko izdelkov in katere naj obdelujemo na katerem stroju, da bo skupni čas obdelave čim krajši.

   Primer:

   Imamo 1000 kosov izdelka A, 500 kosov izdelka B in 2000 kosov izdelka C. Obdelati jih moramo na dveh strojih S1 in S2. Izdelek A je potrebno obdelovati 15 minut na stroju A ali pa 30 minut na stroju B. Izdelek B je potrebno obdelovati 20 minut na stroju S1 ali pa 25 minut na stroju S2. Izdelek C pa je potrebno obdelovati 20 minut na stroju S1 ali pa 12 minut na stroju S2. Koliko izdelkov in katere naj obdelujemo na posameznem stroju, da bo skupni čas obdelave čim krajši?

6. Problem trgovskega potnika

   Trgovski potnik mora zaporedoma obiskati več krajev. Podane so razdalje med kraji. Pri tem ni nujno, da je razdalja od A do B vedno enaka razdalji od B do A. Zanima nas, v kakšnem vrstnem redu naj obišče kraje, da bo vsakega obiskal natanko enkrat in da se bo na koncu vrnil v izhodišče ter da bo pri tem opravil najmanšo pot.

   Primer:

   Trgovski potnik se nahaja v kraju S, obiskati pa mora kraje A, B in C. Razdalje med njimi so prikazane v spodnji tabeli. V kakšnem vrstnem redu naj obišče kraje, da bo vsakega obiskal natanko enkrat in da se bo na koncu vrnil v izhodišče ter da bo pri tem opravil najmanšo pot?

.	S	A	B	C
S	0	6	7	1
A	5	0	4	8
B	7	5	0	6
C	1	9	6	0

POGLAVJE 12

ŠTEVILSKI SISTEMI

Matematični priročnik, str. 758-759

12.1 Pretvorbe med sistemi

V računalništvu poleg desetiškega sistema uporabljamo tudi DVOJIŠKI, OSMIŠKI in ŠESTNAJSTIŠKI SISTEM.

Pretvorbo iz desetiškega sistema v druge sisteme opravimo z deljenjem.

Primer:

$35_{(10)}$ = $??_{(2)}$ = $??_{(8)}$ = $??_{(16)}$

35 : 2 = 17 + 1 / 2

17 : 2 = 8 + 1 / 2

8 : 2 = 4 + 0 / 2

4 : 2 = 2 + 0 / 2

2 : 2 = 1 + 0 / 2

1 : 2 = 0 + 1 / 2

Dobljene ostanke preberemo od spodaj navzgor, torej: $35_{(10)}$ = $100011_{(2)}$.

35 : 8 = 4 + 3 / 8

4 : 8 = 0 + 4 / 8

Dobljene ostanke preberemo od spodaj navzgor, torej: $35_{(10)}$ = $43_{(2)}$.

35 : 16 = 2 + 3 / 16

2 : 16 = 0 + 2 / 16

Dobljene ostanke preberemo od spodaj navzgor, torej: $35_{(10)}$ = $23_{(16)}$.

Ostanke, ki so večji od 10 po vrsti označimo s črkami A, B, C, D, E in F.

V obratno smer pretvarjamo z množenjem.

Primer:

$110011_{(2)}$ = $1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ = 51

Torej: $110011_{(2)}$ = $51_{(10)}$.

$133_{(8)}$ = $1 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 1$ = 91

Torej: $133_{(8)}$ = $91_{(10)}$.

$3B_{(16)}$ = $3 \cdot 16 + 11 \cdot 1$ = 59

Torej: $3B_{(16)}$ = $59_{(10)}$.

Pretvorbo med dvojiškim in osmiškim oz. šestnajstiškim sistemom lahko opravimo direktno. Tri števke dvojiškega sistema predstavljajo eno števko osmiškega sistema. Štiri števke dvojiškega sistema predstavljajo eno števko šestnajstiškega sistema.

Primer:

$68AF_{(16)}$ = 0110 1000 1010 $1111_{(2)}$

$345_{(8)}$ = 011 100 $101_{(2)}$

$10110111000_{(2)}$ = $2670_{(8)}$ = $5B8_{(16)}$

V računalništvu so se uveljavili različni sistemi označevanja številskih sistemov.

Dvojiški sistem ponavadi označimo z znakom % pred številko ali pa z malim b za številko, npr. $10111_{(2)}$ =%10111 = 10111b.

Šestnajstiški sistem ponavadi označimo z znakom $ pred številko ali pa z malim h za številko, npr. $2D1_{(16)}$ = \$2D1 = 2D1h.

V programih v programskem jeziku C lahko uporabljamo osmiški in šestnajstiški sistem zapisa števil, ni pa možnosti dvojiškega zapisa. Številko tam zapišemo po šestnajstiško tako, da dodamo pred številko $0x$, npr. $9F_{(16)}$ = 0x9F. Precej bolj nenavadno je označevanje osmiškega sistema. Vsaka številka, ki se začne z 0 se obravnava v osmiškem sistemu! Tako npr. številka 013 ne pomeni 13 ampak 11, saj je $13_{(8)}$ = $11_{(10)}$.

12.2 Uporaba dvojiškega sistema v računalništvu

Računalnik je stroj, ki v svoji osnovi računa v dvojiškem sistemu. Zato se je v povezavi z dvojiškim sistemom razvila posebna terminologija.

Merska enota za količino informacije je 1 bit. A 1 bit informacije je zelo majhna in v praksi le redko uporabna količina informacije, običajno potrebujemo več bitov informacije.

Uveljavilo se je združevanje informacij v kose po 8 bitov, kar je dovolj, da predstavimo števila od 0 do 255, od -128 do+127, množico črk, števk in ločil itd.

8 bitov = 1 zlog oz. 1 byte (s kratico zapišemo 1 B = 8 bit)

1024 zlogov = 1 kilozlog oz. 1 kilobyte (s kratico 1024 B = 1kB)

1024 kilozlogov = 1 megazlog oz. 1 megabyte (s kratico 1024 kB = 1 MB)

Označbe kilo, mega, giga itd. so v povezavi z enoto **zlog** izjema v merskem sistemu, saj niso enake 10^3, 10^6, 10^9 itd. ampak 2^{10}, 2^{20}, 2^{30} itd.

En zlog zapišemo v dvojiškem sistemu z 8 števkami, v šestnajstiškem sistemu pa le z 2 števkama.

Primer:

V pomnilniški celici, ki je velika 1 zlog, je shranjeno število 21. Kako bi vsebino te pomnilniške celice zapisali v dvojiškem in kako v šestnajstiškem sistemu?

Odgovor: V dvojiškem sistemu jo zapišemo kot %00010101, v šestnajstiškem sistemu pa kot $15.

12.3 Predstavitev negativnih števil

Zanima nas predstavitev negativnih števil v dvojiškem sistemu.

Negativna števila lahko predstavimo s predznakom, eniškim komplementom ali pa z dvojiškim komplementom.

Primer:

Število +14 predstavimo v dvojiškem sistemu kot $00001110_{(2)}$.

Če uporabimo predznak, potem dobimo -14 = $10001110_{(2)}$.

Če uporabimo eniški komplement, potem dobimo -14 = $11110001_{(2)}$.

Če uporabimo dvojiški komplement, potem dobimo - 14 = $11110010_{(2)}$.

V računalništvu se je uveljavil dvojiški komplement, ki omogoča, da z enim zlogom predstavimo številke od -128 do +127.

Primer:

Računalniški ukaz `MOVE.L #-10, D7` zapiše na računalniškem sistemu s procesorju Motorola 68000 v 32-bitni register D7 negativno število -10. Kako bi v dvojiškem in šestnajstiškem sistemu zapisali vsebino tega registra.

Odgovor:

Število +10 se v dvojiškem sistemu z 32 biti zapiše kot 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 $1010_{(2)}$. Število -10 se z uporabo dvojiškega komplementa z 32 biti zato zapiše kot 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 $0110_{(2)}$. V šestnajstiškem sistemu to zapišemo krajše kot $\text{FFFFFFF6}_{(16)}$.

POGLAVJE 13

PREKLOPNE FUNKCIJE

Matematični priročnik, str. 250-252, 266-269

13.1 Uvod

Vzemimo, da lahko spremenljivke zavzamejo le dve različni vrednosti, ki ju označimo kot 0 in 1. Kako bi v tem primeru izgledale osnovne računske operacije? Katere so sploh smiselne? Praktičen primer takšne matematike so preklopne funkcije, ki predstavljajo model tokokrogov s stikali. Lastnosti preklopnih funkcij v matematiki obravnavamo v okviru poglavja o Boolovi algebri.

13.2 Osnovne preklopne funkcije

Osnovne preklopne funkcije so **konjunkcija** (logični IN, AND), **disjunkcija** (logični ALI, OR) in **negacija** (logični NE, NOT).

Za označevanje osnovnih preklopnih funkcij se uporabljajo različni simboli:

konjunkcija: $A \cdot B$, $A \wedge B$

disjunkcija: $A + B$, $A \vee B$

negacija: $\bar{A}$, $-A$, $\neg A$, $\sim A$

Pomen osnovnih preklopnih funkcij definiramo s **pravilnostnimi tabelami**.

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \cdot B$	$A + B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Pravilnostna tabela nam lahko pomaga tudi takrat, če želimo razumeti pomen sestavljenih preklopnih funkcij.

A	B	C	$A \cdot C$	$B \cdot C$	$A \cdot C + B \cdot C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Zapis preklopne funkcije z znaki imenujemo **Boolov izraz**. Isto preklopno funkcijo lahko zapišemo z različnimi Boolovimi izrazi.

Pravila za pretvarjanje Boolovih izrazov

1. nevtralni element

   $A + 0 = A$

   $A \cdot 1 = A$

2. nasprotni element

   $A + \bar{A} = 1$

   $A \cdot \bar{A} = 0$

3. komutativnost

   $A + B = B + A$

   $A \cdot B = B \cdot A$

4. asociativnost

   $A + (B + C) = (A + B) + C$

   $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

5. distributivnost

   $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

   $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

6. idempotenca

   $A + A = A$

   $A \cdot A = A$

7. absorbcija

   $A + A \cdot B = A$

   $A \cdot (A + B) = A$

8. De Morganov izrek

   $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

   $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

Naloga:

▲ S pravilnostno tabelo preveri pravilnost pravila o absorbciji.

▷ Napišemo tabelo ter primerjamo prvi in zadnji stolpec.

A	B	$A \cdot B$	$A + A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

13.3 Dvočlene preklopne funkcije

Funkciji logični IN in logični ALI sta dvočleni preklopni funkciji, nista pa edini. Vseh skupaj jih je 16, vendar nimajo vse svojega imena in znaka.

št.	tabela	ime funkcije	simbol	kratica	izražava
0	0000	konstanta	0	0	0
1	0001	konjunkcija	$\cdot$	AND	$A \cdot B$
2	0010	negirana implikacija			$A \cdot \bar{B}$
3	0011	spremenljivka A			A
4	0100	negirana implikacija			$\bar{A} \cdot B$
5	0101	spremenljivka B			B
6	0110	ekskluzivni ALI	$\oplus$	XOR	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$
7	0111	disjunkcija	$+$	OR	$A + B$
8	1000	Piercova funkcija	$\downarrow$	NOR	$\overline{A + B}$
9	1001	ekvivalenca	$\equiv$	$XNOR$	$A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
10	1010	negacija B	$\neg$	NOT	$\bar{B}$
11	1011	implikacija	$\leftarrow$		$A + \bar{B}$
12	1100	negacija A	$\neg$	NOT	$\bar{A}$
13	1101	implikacija	$\rightarrow$		$\bar{A} + B$
14	1110	Shefferjeva funkcija	$\vert$	$NAND$	$\overline{A} \cdot B$
15	1111	konstanta 1	1		1

13.4 Popolna disjunktivna normalna oblika

Z množico operatorjev $\{\cdot, +, \neg\}$ lahko izrazimo vse preklopne funkcije, zato jo imenujemo **funkcijsko poln sistem operatorjev**. Obstaja način, kako s pomočjo teh operatorjev vsako funkcijo enolično zapišemo. Tak zapis imenujemo popolna disjunktivna normalna oblika, ki jo s kratico označimo kot PDNO.

Najprej podajmo nekaj dodatnih izrazov. Posamezno spremenljivko in njeno negacijo imenujemo **literal**. Produkt literalov vseh spremenljivk, ki nastopajo v funkciji, je **minterm**. Vsakemu mintermu v pravilnostni tabeli ustreza ena vrstica.

Primer:

Imejmo funkcijo $F(A, B, C)$. Naštej vse minterme.

Odgovor: Mintermi so $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$, $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$, $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$, $\bar{A} \cdot B \cdot C$, $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$, $A \cdot \bar{B} \cdot C$, $A \cdot B \cdot \bar{C}$ in $A \cdot B \cdot C$.

Vsako funkcijo lahko zapišemo kot vsoto mintermov. V vsoti nastopajo natanko tisti mintermi, za katere je v pravilnostni tabeli rezultat 1. Tako dobimo PDNO.

Primer:

$F = A \cdot C + B \cdot C$

V PDNO se ta funkcija zapiše kot $F = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$

13.5 Minimizacija preklopnih funkcij

Vsak zapis funkcije v obliki vsote produktov imenujemo disjunktivna normalna oblika (DNO). PDNO je poseben primer DNO. V praksi si želimo čim krajši zapis preklopnih funkcij. **Minimalna disjunktivna normalna oblika** (MDNO) je takšna DNO, ki ima najmanjše možno število produktov.

Minimizacija preklopnih funkcij je v splošnem zahteven problem. e rešujemo na papirju, uporabimo Veitcheve ali Karnaughove diagrame. Prikazali bomo le uporabo **Karnaughovih diagramov**.

Postopek poteka v treh korakih:

1. Najprej glede na število spremenljivk izberemo ustrezno velik diagram in na ustrezna mesta v diagramu vpišemo enice.

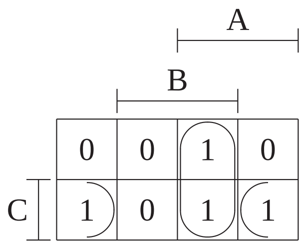
2. Nato združujemo te enice v manjše ali večje enote, ki jim rečemo kar krogi. Pri tem veljajo naslednja pravila: znotraj vsakega kroga so lahko samo enice, krogi so lahko veliki 1, 2, 4, 8 itd. polj, krogi se lahko med seboj prekrivajo, krogi lahko segajo čez rob diagama. Iščemo tako rešitev, ki ima čim manjše število čim večjih krogov.

3. Vsakemu krogu pripada en produkt.

Naloge:

▲ Minimiziraj preklopno funkcijo $F = A \cdot B + A \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$

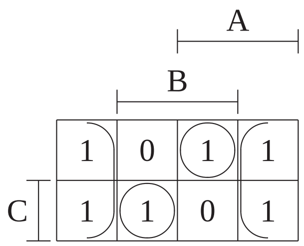
▷ Karnaughov diagramov:



Odgovor: $F = A \cdot B + \bar{B} \cdot C$

▲ Minimiziraj preklopno funkcijo $F = (A \cdot B) \oplus (B \to C)$

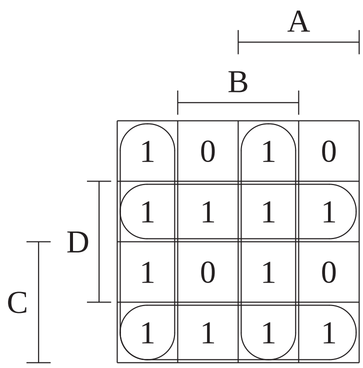
▷ Karnaughov diagramov:



Odgovor: $F = \bar{B} + \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{C}$

▲ Minimiziraj preklopno funkcijo $F = (A \oplus B) \to (C \oplus D)$.

▷ Karnaughov diagramov:



Odgovor: $F = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B + \bar{C} \cdot D + C \cdot \bar{D}$

POGLAVJE 14

DODATNA SNOV

14.1 Kotne funkcije

Matematični priročnik, str. 59-68

Definicija

Kotne funkcije so definirane z razmerji v pravokotnem trikotniku.

$$\sin\alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}}$$

Vrednosti kotnih funkcij za osnovne kote

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Vrednosti kotnih funkcij si zapomnimo tako, da upoštevamo $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$ in $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$.

Kotne funkcije so periodične funkcije. Sinus in kosinus imata periodo 2π, tangens in kotangens pa periodo π. Zaradi periodičnosti velja:

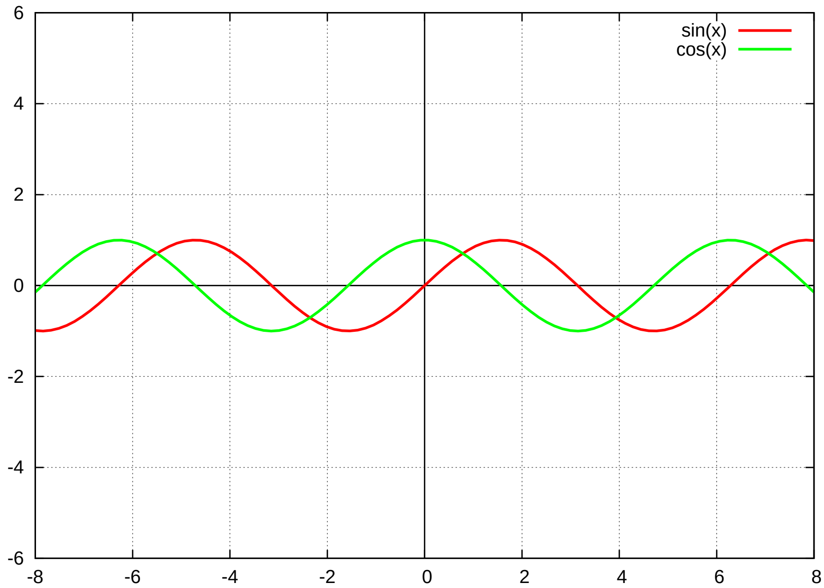
$\sin(x \pm 2 \cdot k \cdot \pi) = \sin x$

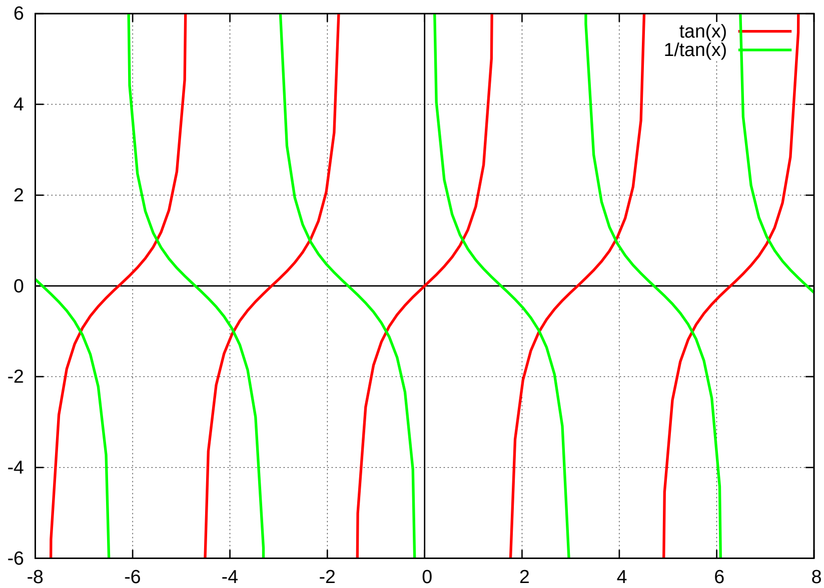
$\cos(x \pm 2 \cdot k \cdot \pi) = \cos x$

$\mathrm{tg}(x \pm k \cdot \pi) = \mathrm{tg}\, x$

$\mathrm{ctg}(x \pm k \cdot \pi) = \mathrm{ctg}\, x$

Grafi kotnih funkcij narisani v pravilnem razmerju izgledajo takole:





Ničle kotnih funkcij zapišemo na naslednji način:

$$\begin{array}{rc} \sin x=0 & x=k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \cos x=0 & x=(2\cdot k-1)\cdot\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x=0 & x=k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg} x=0 & x=(2\cdot k-1)\cdot\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

Pretvorba v kotno funkcijo ostrega kota

Kotno funkcijo poljubnega kota lahko prevedemo na funkcijo **ostrega kota**.

$0°-90°$	$90°-180°$	$180°-270°$	$270°-360°$
$0-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\pi$	$\pi-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}-2\pi$
ostri kot	$\sin(\pi-x)=\sin x$	$\sin(\pi+x)=-\sin x$	$\sin(2\pi-x)=-\sin x$
	$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\cos(\pi+x)=-\cos x$	$\cos(2\pi-x)=\cos x$
	$\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(2\pi-x)=-\operatorname{tg} x$
	$\operatorname{ctg}(\pi-x)=-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}(\pi+x)=\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}(2\pi-x)=-\operatorname{ctg} x$

Koristne so tudi naslednje zveze:

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$

Naloge:

▲ $\sin 1230°=\sin(3\cdot 360°+150°)=\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$

▲ $\cos(-1020°)=\cos(1020°)=\cos(2\cdot 360°+300°)=\cos 300°=\cos(360°-60°)=$
$=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

▲ $\operatorname{tg} 210°=\dfrac{\sin 210°}{\cos 210°}=\dfrac{\sin(180°+30°)}{\cos(180°+30°)}=\dfrac{-\sin 30°}{-\cos 30°}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Pomembne zveze med kotnimi funkcijami

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x)$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y))$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$

Naloge:

▲ $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-x) = \cos(x)$

▲ $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}) =$

$= \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$

Risanje kotnih funkcij

Funkcijo sinus v splošnem zapišemo kot $y = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$.

A — amplituda

ω — frekvenca

φ — faza

Osnovna perioda funkcije je $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Zaloga vrednosti je od $-A$ do $+A$.

Ničle so v točkah: $x = \frac{1}{\omega} \cdot (k \cdot \pi - \varphi)$.

Minimumi so v točkah: $x = \frac{1}{\omega} \cdot (2 \cdot k \cdot \pi - \frac{\pi}{2} - \varphi)$.

Maksimumi so v točkah: $x = \frac{1}{\omega} \cdot (2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - \varphi)$.

Kot primer narišimo graf funkcije $f(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x - 4)$.

Perioda: $\frac{2 \cdot \pi}{3} = 2,094$

Amplituda: 2

Ničle: $x = \frac{1}{3} \cdot (k \cdot \pi + 4)$

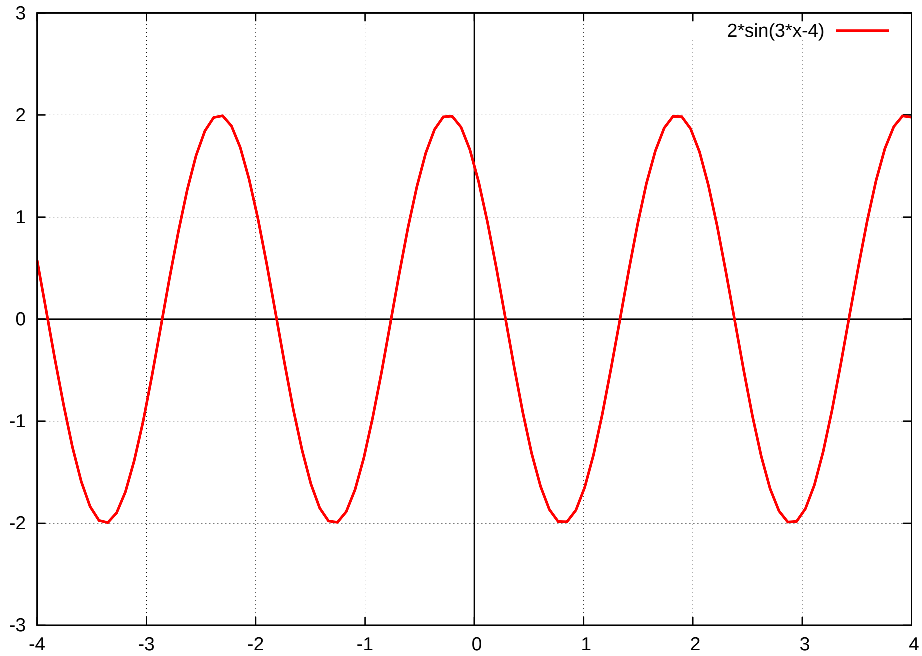
$k = 0$: $x = \frac{1}{3} \cdot (0 \cdot \pi + 4) = 1,33$

$k = 1$: $x = \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot \pi + 4) = 2,38$

Maksimumi: $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} + 4)$

$k = 0$: $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} + 4) = 1,86$

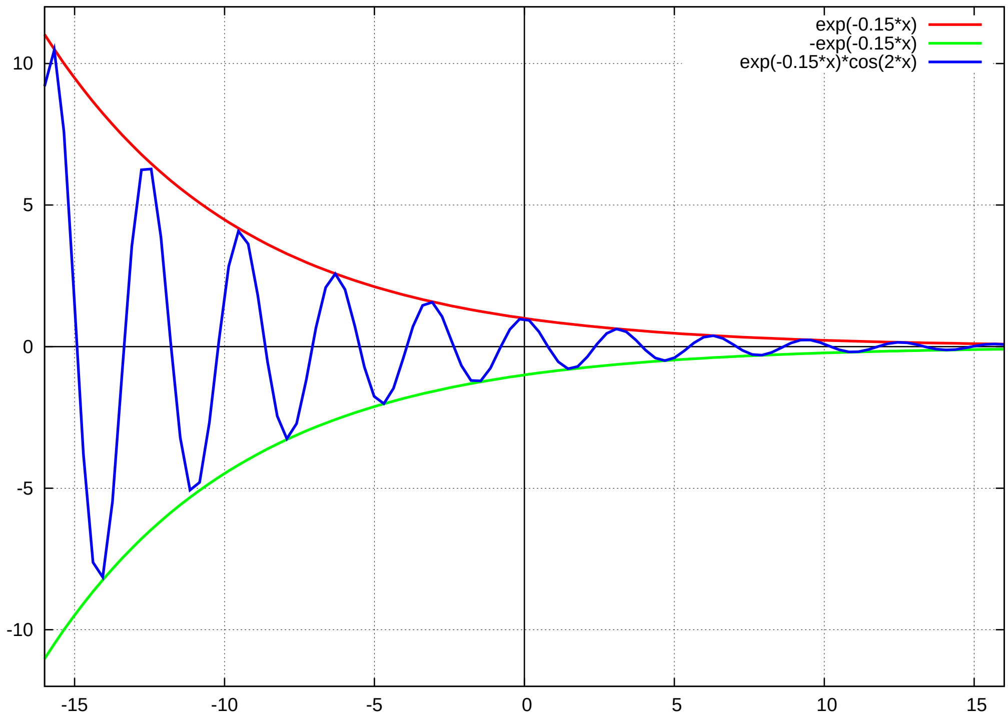
$k = -1$: $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot (-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2} + 4) = -0,24$



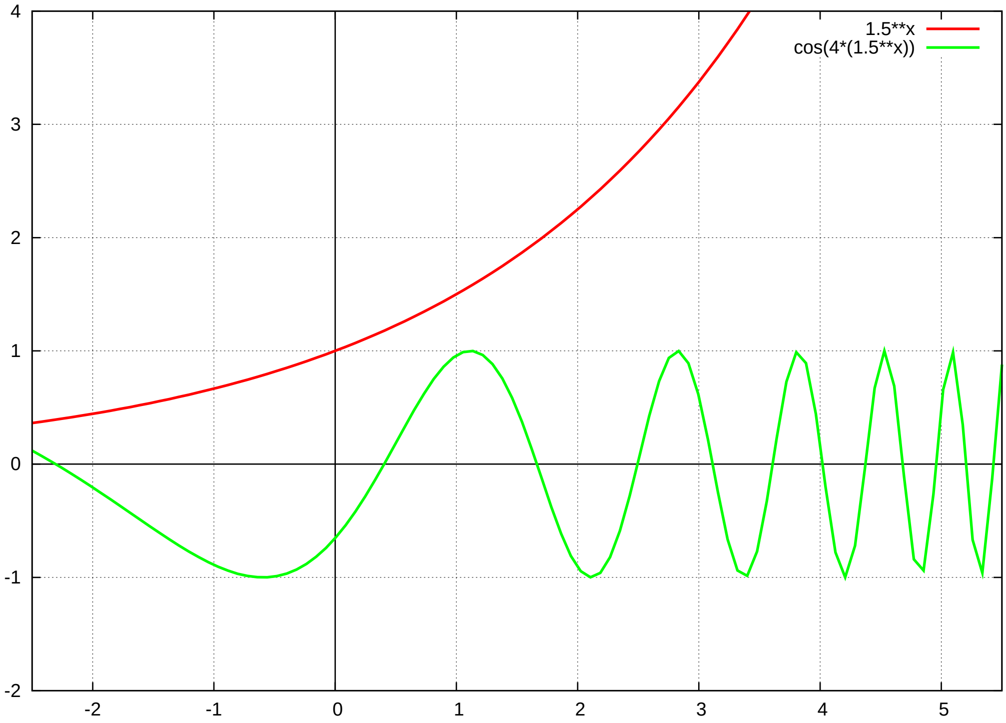
Posredno risanje kotnih funkcij

Naloge:

▲ Nariši graf funkcije $f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}15 \cdot x} \cdot \cos 2x$.



▲ Nariši graf funkcije $f(x) = \cos(2^x)$.



Odvodi s kotnimi funkcijami

- $y = \sin x \qquad y' = \cos x$
- $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$
- $y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Naloge:

▲ $y = 2 \cdot \sin(3 \cdot x - 4)$

▷ $y' = 2 \cdot \cos(3 \cdot x - 4) \cdot 3 = 6 \cdot \cos(3 \cdot x - 4)$

▲ $y = \operatorname{tg}^2 x$

▷ $y' = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

14.2 Krožne funkcije

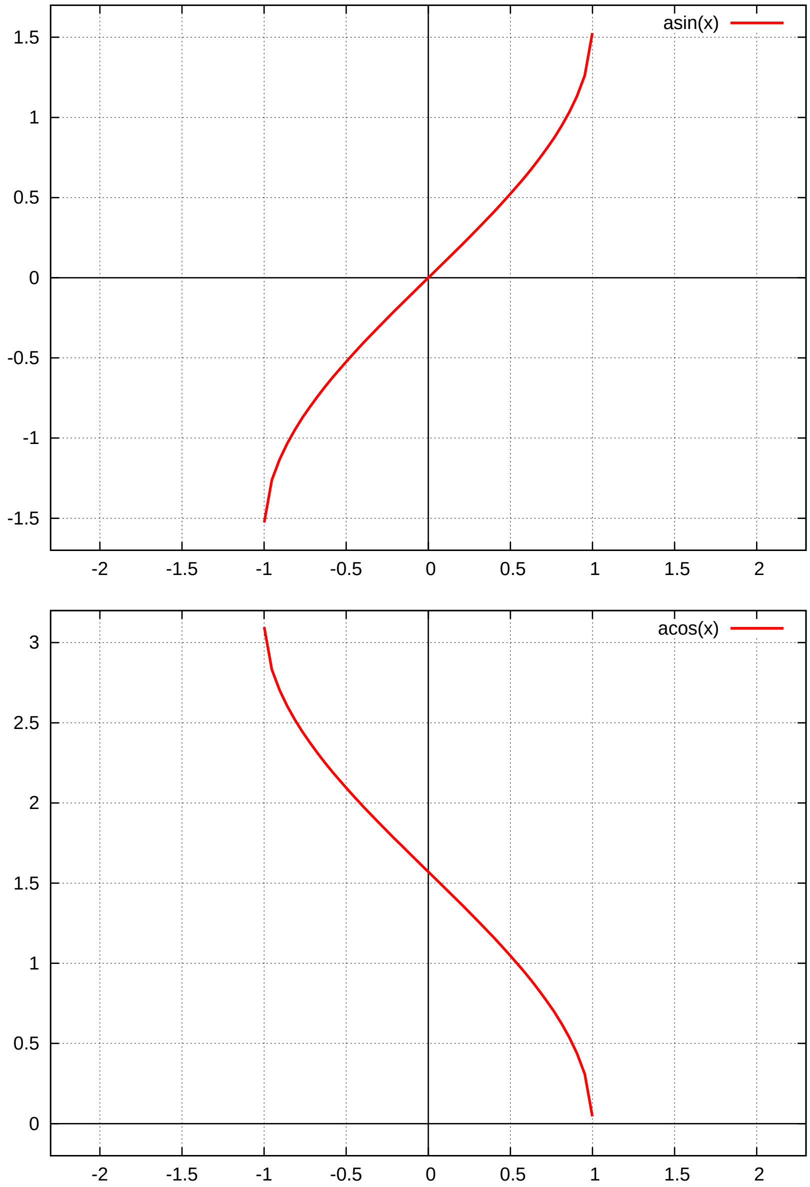
Matematični priročnik, str. 70-71

Definicija

Krožne funkcije so inverzne funkcije kotnih funkcij.

$y = \sin x \quad x = \arcsin y$
$y = \cos x \quad x = \arccos y$

Ker so kotne funkcije periodične, je potrebno izbrati zalogo vrednosti. Pri $\arcsin x$ izberemo rezultate na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, pri $\arccos x$ pa na intervalu $[0, \pi]$.



Odvodi s krožnimi funkcijami

1. $y = \arcsin x \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $y = \arccos x \qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4. $y = \operatorname{arc\,ctg} x \qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Naloge:

▲ $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2-x}{1+2x}$

▷ $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2-x}{1+2x}\right)^2} \cdot \dfrac{(-1)\cdot(1+2x)-(2-x)\cdot 2}{(1+2x)^2} = \dfrac{-1-2x-4+2x}{(1+2x)^2+(2-x)^2} =$

$= \dfrac{-5}{1+4x+4x^{2+4-4x+x^2}} = \dfrac{-5}{5x^2+5} = \dfrac{-1}{x^2+1}$

▲ $y = \arccos x^{-2}$

▷ $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{-4}}} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \dfrac{2x^{-3}}{\sqrt{1-x^{-4}}} = \dfrac{2}{x^3 \cdot \sqrt{1-x^{-4}}} = \dfrac{2}{x^3 \cdot \sqrt{1-\dfrac{1}{x^4}}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x^6-x^2}} = \dfrac{2}{x \cdot \sqrt{x^4-1}}$

▲ $y = \operatorname{arc\,tg}(\mathrm{e}^x)$

▷ $y' = -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}} \cdot \mathrm{e}^x = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}$

▲ $y = x \cdot \arcsin(x)$

▷ domača naloga

▲ $y = \dfrac{1}{\arccos(x)}$

▷ domača naloga

14.3 Integriranje po delih

Matematični priročnik, str. 317

Metodo integriranja po delih imenujemo tudi integriranje “per partes”. Izpeljemo jo na naslednji način.

Zapišemo odvod produkta in dodamo dx:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(u \cdot v)' \cdot \mathrm{dx} = u' \cdot v \cdot \mathrm{dx} + u \cdot v' \cdot \mathrm{dx}$

Obe strani integriramo:

$u \cdot v = \int u' \cdot v \cdot \mathrm{dx} + \int u \cdot v' \cdot \mathrm{dx}$

Sedaj zamenjamo člene:

$\int u \cdot v' \cdot \mathrm{dx} = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot \mathrm{dx}$

Dobljen rezultat enostavneje zapišemo kot: $\int u \cdot \mathrm{dv} = u \cdot v - \int v \cdot \mathrm{du}$ in ga koristno uporabimo pri integriranju produkta.

Naloge:

▲ $$\int x^5 \cdot \ln x \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & \mathrm{du} = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = x^5 \cdot \mathrm{dx} & v = \int x^5 \cdot \mathrm{dx} = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \int \frac{x^6}{6} \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} =$$

$$= \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 \cdot \mathrm{dx} = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot x^6 + c = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \frac{x^6}{36} + c$$

▲ $$\int x \cdot \sin x \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \sin x \cdot \mathrm{dx} & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \mathrm{dx} =$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

▲ $$\int \log_3(2 \cdot x) \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{cc} u = \log_3(2 \cdot x) & \mathrm{du} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot \ln 3} \cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \mathrm{dx} & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \log_3(2 \cdot x) - \int x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} \cdot \mathrm{dx} = x \cdot \log_3(2 \cdot x) - \frac{x}{\ln 3} + c$$

▲ $$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \cdot \mathrm{dx} = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{cc} u = \ln^2 x & \mathrm{du} = \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \frac{\mathrm{dx}}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x + \int \frac{2}{x^2} \cdot \ln x \cdot \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & \mathrm{du} = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \frac{2}{x^2} \cdot \mathrm{dx} & v = -\frac{2}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - \frac{2}{x} \cdot \ln x + \int \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - \frac{2}{x} \cdot \ln x - \frac{2}{x} + c$$

14.4 Implicitno podane funkcije

Matematični priročnik, str. 35

Pri implicitno podanih funkcijah spremenljivki x in y nista ločeni glede na enačaj.

Naloge:

▲ $x + y = 1$

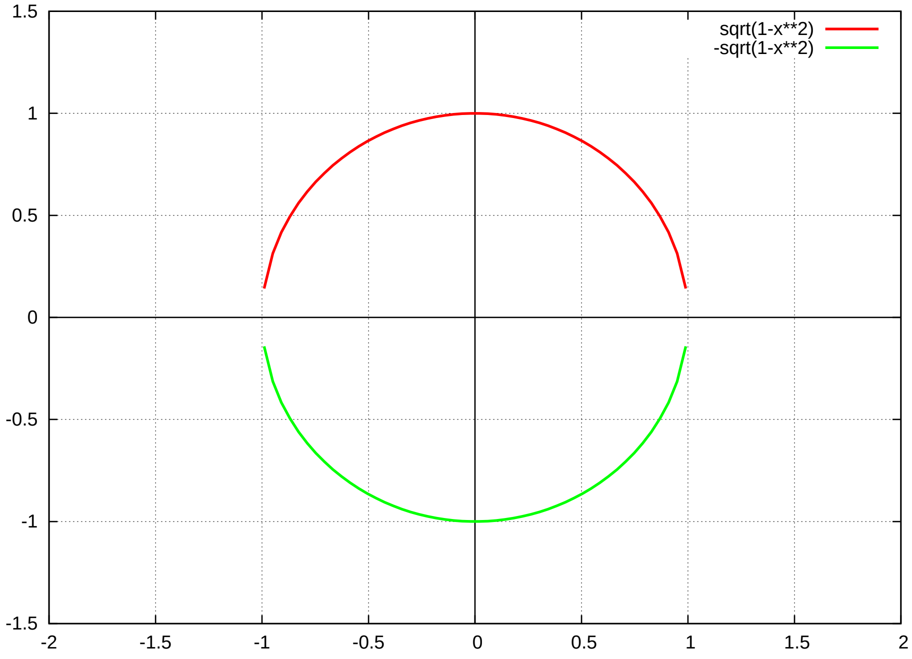
▷ Enačbo lahko na enostaven način pretvorimo v eksplicitno obliko:

$y = 1 - x$

▲ $x^2 + y^2 = 1$

▷ V tem primeru pretvorba v eksplicitno obliko ni tako enostavna, saj podana enačba ne določa funkcije $y = f(x)$ ampak relacijo med x in y. To pomeni, da istemu x lahko ustreza več kot ena vrednost y.

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$



Odvod implicitno podanih funkcij

Da bi izračunali odvod implicitno podane funkcije, je ni potrebno pretvoriti v eksplicitno obliko. Odvajamo jih lahko direktno in na koncu izrazimo y'.

Naloge:

▲ $x + y = 1$

▷ $1 + y' = 0$

$y' = -1$

▲ $x^2 + y^2 = 1$

▷ $2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$

▲ Izračunaj vrednost odvoda funkcije, ki je podana implicitno z enačbo $\ln x + \ln y = 1$ v točki e.

▷ $\ln x + \ln y = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot y' = 0$

Enačbe ne preoblikujemo ampak direktno vstavimo podano točko. Ker pa potrebujemo obe koordinati točke, najprej izračunamo y pri $x = \mathrm{e}$.

$\ln \mathrm{e} + \ln y = 1$

$1 + \ln y = 1$

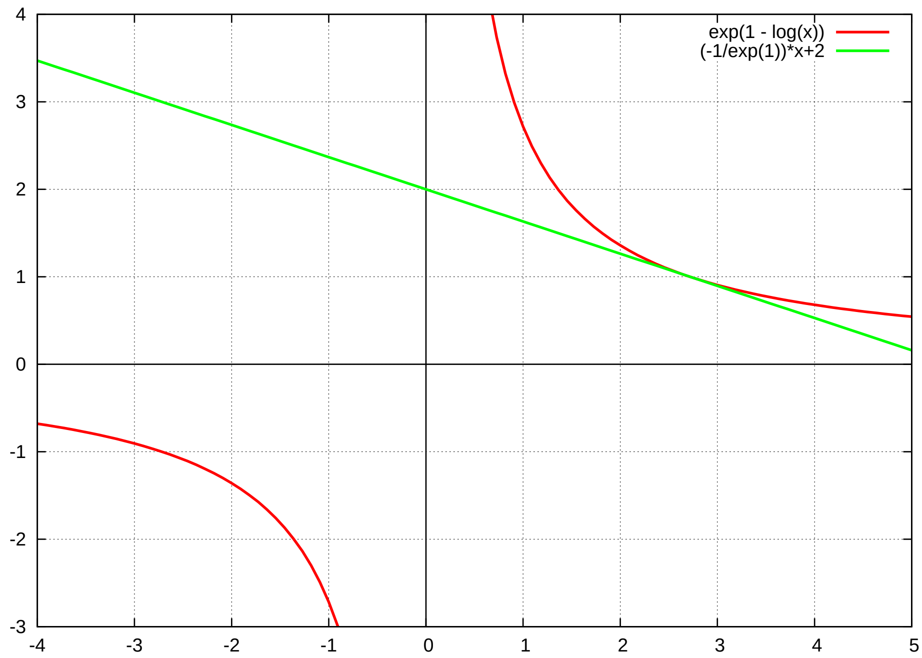
$\ln y = 0$

$y = \mathrm{e}^0 = 1$

Dobili smo točko $(\mathrm{e}, 1)$, ki jo sedaj vstavimo v odvod:

$\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{1} \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{1}{e}$



▲ Izračunaj vrednost odvoda funkcije, ki je podana implicitno z enačbo $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ v točki $\sqrt{5}$.

▷ Tako, kot v prejšnjem primeru, bomo potrebovali obe koordinati točke, zato najprej vstavimo x in izračunamo y.

$4 \cdot 5 + 9 \cdot y^2 - 36 = 0$

$9 \cdot y^2 = 16$

$y = \pm\frac{4}{3}$

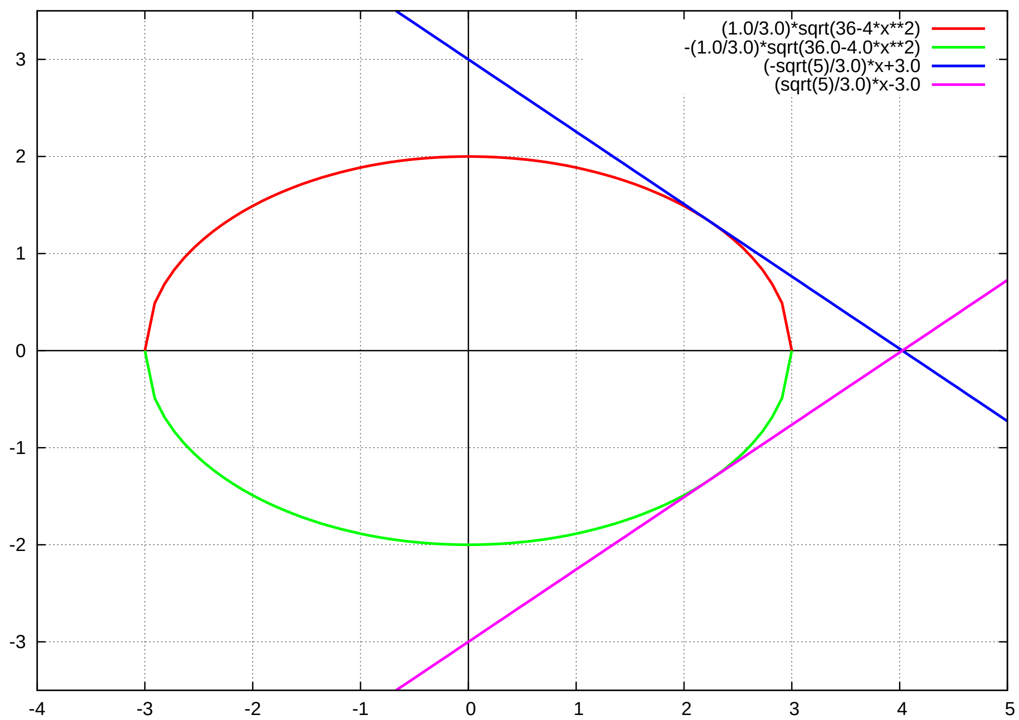
Ugotovimo lahko, da podanemu x ustrezata dve točki, zato bomo izračunali odvod v obeh točkah. Sedaj odvajamo podano funkcijo:

$8x + 18y \cdot y' = 0$

$$y' = -\frac{8x}{18y} = -\frac{4x}{9y}$$

$$y_1' = -\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{9 \cdot \frac{4}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$y_2' = -\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{9 \cdot (-\frac{4}{3})} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



14.5 Parametrično podane funkcije

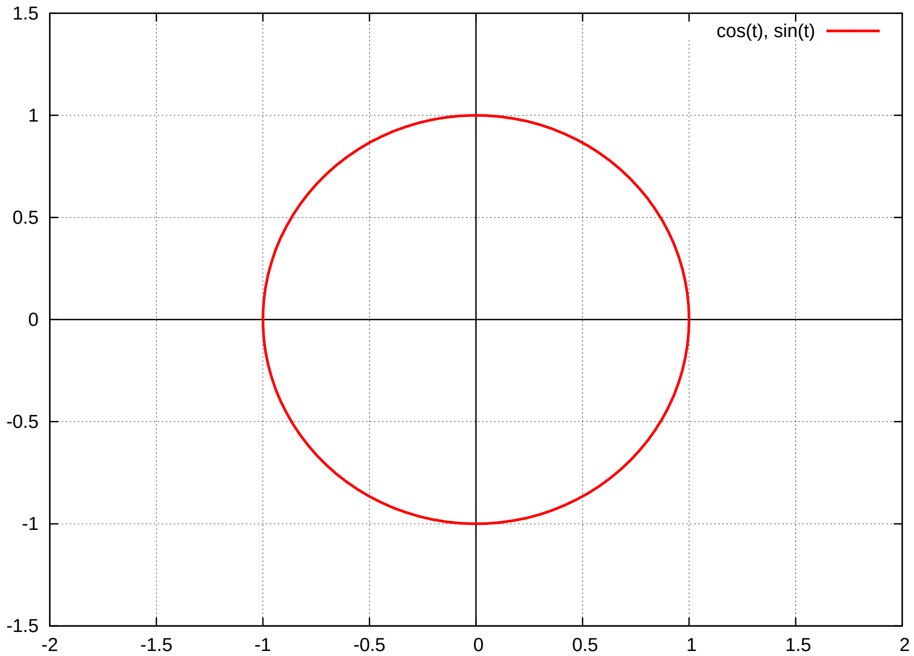
Matematični priročnik, str. 35, 277

Parametrično podana funkcija ima obliko dveh enačb, v katerih nastopa parameter t.

Naloga:

- ▲ $x = \cos t$
- ▷ $y = \sin t$

  Če ti dve enačbi obravnavamo skupaj lahko ugotovimo, da predstavljata krožnico s polmerom 1.



Odvod parametrično podanih funkcij

Odvod po spremenljivki t bomo označevali kot $\dot{f}(t)$. Torej velja:

$$y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$$

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$$

Za prvi in drugi odvod imamo naslednji pravili:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

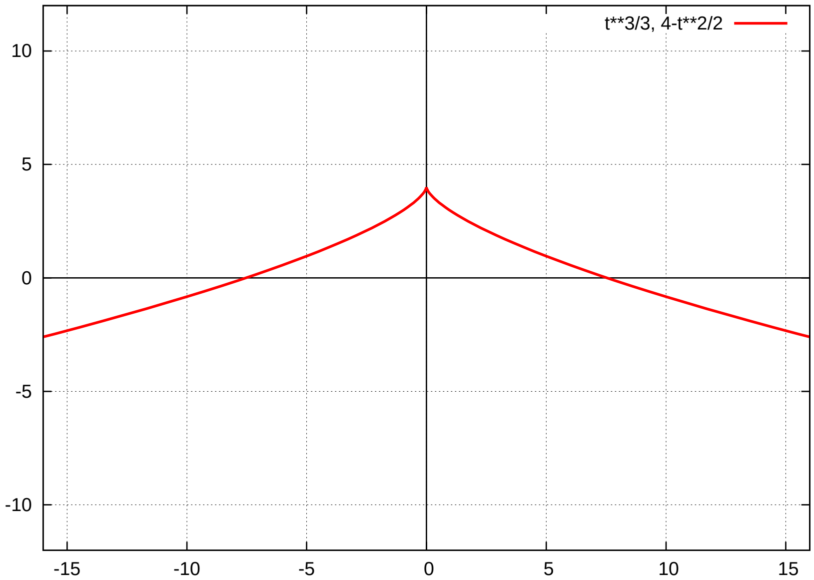
Naloge:

▲ Izračunaj odvod parametrično podane funkcije: $x = \cos t$, $y = \sin t$

▷ $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$

Če je $t = \frac{\pi}{2}$, potem enačbi določata točko $(0, 1)$. Odvod v tej točki je $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.

▲ Izračunaj prvi in drugi odvod parametrično podane funkcije: $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$

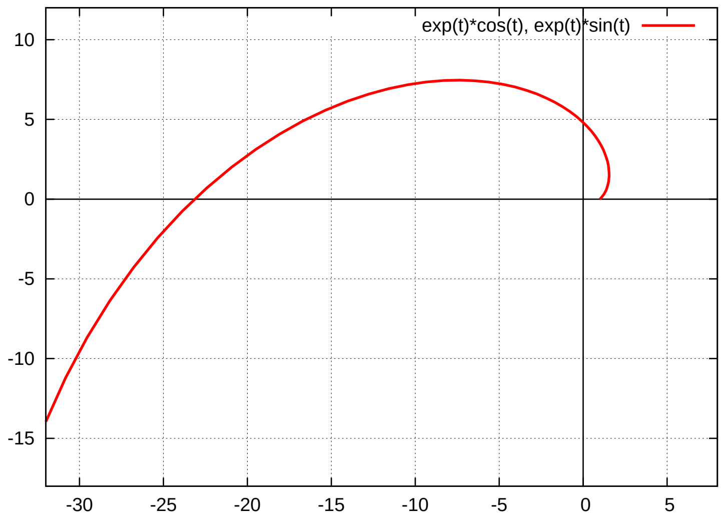


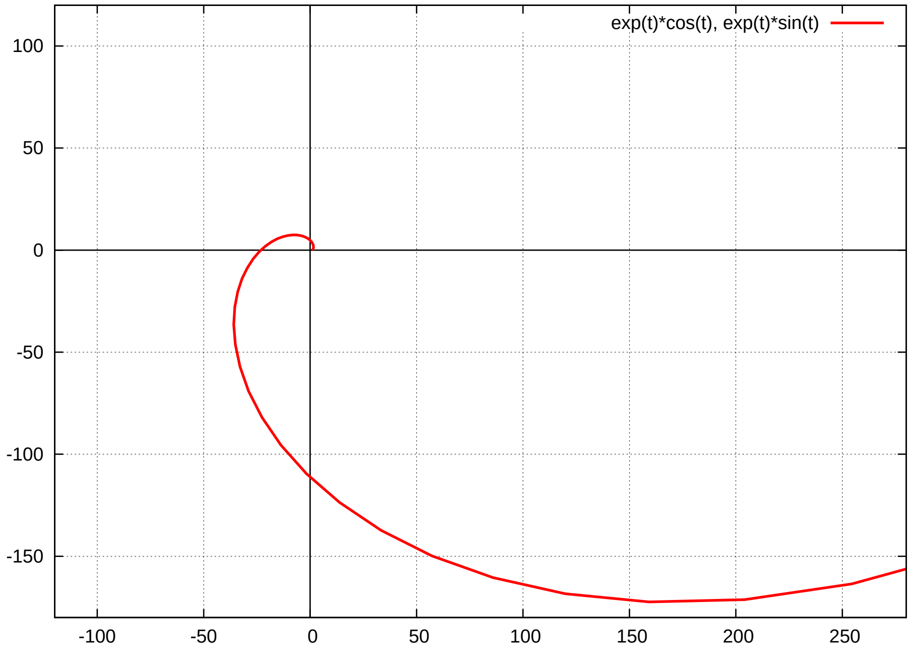
▷ domača naloga

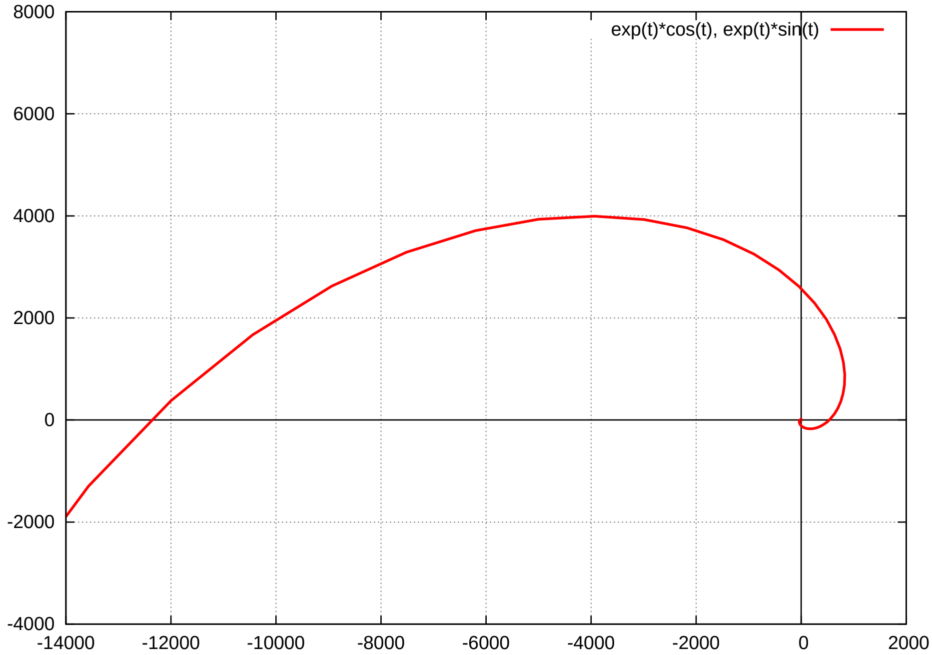
▲ Izračunaj vrednost prvega odvoda v točki 0 za naslednjo parametrično podano funkcijo:

$x = \mathrm{e}^t \cdot \cos t$

$y = \mathrm{e}^t \cdot \sin t$







▷ domača naloga

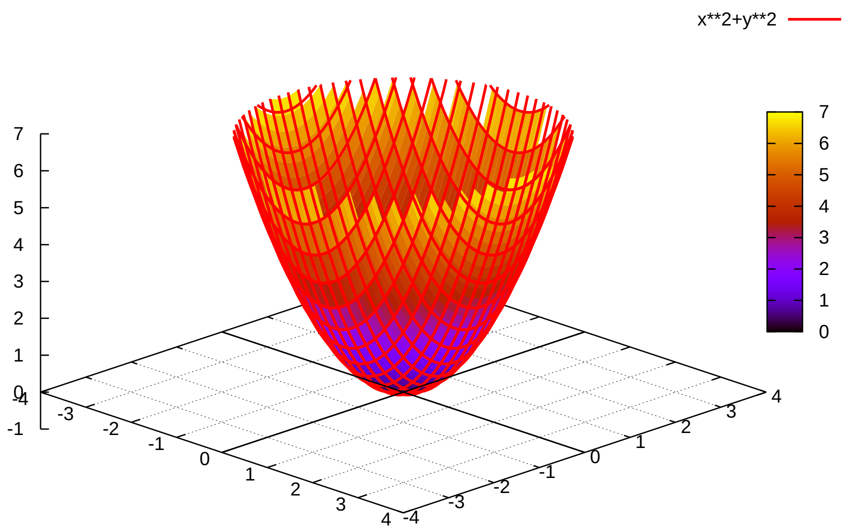
14.6 Funkcije dveh neodvisnih spremenljivk

Matematični priročnik, str. 100-102, 283, 290-291

Graf funkcije dve neodvisnih spremenljivk je ploskev.

Naloga:

▲ $z = x^2 + y^2$



Parcialni odvodi

Če funkcijo dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ odvajamo po eni spremenljivki, dobimo parcialni odvod funkcije. Parcialni odvod funkcije po spremenljivki x označimo kot $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Parcialni odvod funkcije po spremenljivki y označimo kot $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Naloge:

▲ $z = x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y$

▷ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + x^3$

▲ $z = x \cdot \sqrt{y}$

▷ domača naloga

▲ $z = x^y$

▷ domača naloga

Minimum in maksimum funkcije dveh spremenljivk

Če ima funkcija dveh spremenljivk $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) minimum ali maksimum, potem v tej točki velja:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Podobno kot pri funkciji ene spremenljivke je ničla prvega odvoda potreben, ne pa tudi zadosten pogoj.

Pri funkciji ene spremenljivke smo minimum in maksimum prepoznali s pomočjo drugega odvoda. Tudi pri funkcijah dveh spremenljivk je podobno. Imamo pa tri različne druge odvode; drugi odvod po x, drugi odvod po y in mešani odvod.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Iz dobljenih odvodov tvorimo matriko, ki se imenuje Jakobijeva matrika. Determinanta Jakobijeve matrike nam pomaga določiti, ali je v točki minimum oz. maksimum.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Če je det $J(x, y) > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, potem je v točki (x, y)minimum.

Če je det $J(x, y) > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, potem je v točki (x, y)maksimum.

Če je det $J(x, y) < 0$, potem v točki (x, y) ni niti minimum niti maksimum.

▲ Poišči točke, v katerih bi funkcija $z = x^2 + x + y^2 + y + 5$ lahko imela maksimum.

▷ glej zapiske predavanj

▲ Poišči minimum in maksimum funkcije $z = x^2 + x \cdot y + y^2$.

▷ glej zapiske predavanj

14.7 Diferencialne enačbe

Matematični priročnik, str. 366-367

Imamo enačbo, v kateri nastopajo x, funkcija $y = f(x)$ in y'. Izračunati je potrebno y. Ta problem imenujemo diferencialna enačba prvega reda.

Primer:

$x \cdot y' - a \cdot y = 0$

Hitro se lahko prepričamo, da je rešitev: $y = c \cdot x^a$

$y' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$

$x \cdot y' - a \cdot y = x \cdot (c \cdot a \cdot x^{a-1}) - a \cdot (c \cdot x^a) = 0$

Iz danega primera lahko razberemo, da v splošnem rešitev diferencialne enačbe ni ena sama funkcija, ampak rešitev vsebuje konstanto, ki je lahko poljubna. Zato pogosto postavimo kot dodatni pogoj eno točko (x, y), ki jo mora rešitev vsebovati. Tako dopolnjeno nalogo imenujemo Cauchyjev problem.

▲ Poišči rešitev diferencialne enačbe $x \cdot y' - a \cdot y = 0$, ki gre skozi točko $(2, 4)$.

▷ glej zapiske predavanj

Reševanje diferencialnih enačb z ločljivima spremenljivkama

Glej zapiske predavanj.

14.8 Linearna regresija

Matematični priročnik, str. 617-619

Imejmo poskus, katerega izidi so pari števil (x, y). Zanima nas, ali so vrednosti x in y med seboj linearno odvisne, torej ali obstaja premica, ki se dobro prilega točkam (x, y).

Za ugotavljanje linearne odvisnosti izračunamo **korelacijski koeficient** r_{xy}.

$$r_{\mathrm{xy}} = \frac{S_{\mathrm{xy}}}{\sqrt{\mathrm{Sx} \cdot \mathrm{Sy}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Bližje, kot je r_{xy} vrednosti 1, bolj sta vrednosti$x$ in y linearno odvisni med seboj. Koeficienta premice, ki se najboljše prilega danim točkam, sta:

$$b = \frac{S_{\mathrm{xy}}}{\mathrm{Sx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Pri izračunu si lahko pomagamo tako, da S_x, S_y in S_{xy} izračunamo na drugačen način:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2}{n}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^2}{n}$$

$$S_{\mathrm{xy}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{xy} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x \cdot \sum_{i=1}^{n} y}{n}$$

Naloge:

▲ Izmerili smo naslednje vrednosti za x in y: (1,12), (2,15), (4,18), (6,26) in (7,29).

Preuči linearno odvisnost vrednosti x in y.

▷ Srednji vrednosti sta $\bar{x} = 4$ in $\bar{y} = 20$. Naredimo tabelo:

x	y	xy	x^2	y^2	$(x - \bar{x})$	$(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	12	12	1	144	-3	-8	24	9	64
2	15	30	4	225	-2	-5	10	4	25
4	18	72	16	324	0	-2	0	0	4
6	26	156	36	676	2	6	12	4	36
7	29	203	49	841	3	9	27	9	81
20	100	473	106	2210	/	/	73	26	210

▷ Za izračun najprej uporabimo prvi način:

$$r_{\mathrm{xy}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{73}{\sqrt{26\cdot 210}} = \frac{73}{73,89} = 0,988$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{73}{26} = 2,81$$

$$a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 20 - 2,81\cdot 4 = 8,77$$

Uporabimo sedaj še drugi način:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n}x^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x\right)^2}{n} = 106 - \frac{20^2}{5} = 106 - 80 = 26$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n}y^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y\right)^2}{n} = 2210 - \frac{100^2}{5} = 2210 - 2000 = 210$$

$$S_{\mathrm{xy}} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{xy} - \frac{\sum_{i=1}^{n}x\cdot\sum_{i=1}^{n}y}{n} = 473 - \frac{20\cdot 100}{5} = 473 - 400 = 73$$

$$r_{\mathrm{xy}} = \frac{S_{\mathrm{xy}}}{\sqrt{\mathrm{Sx}\cdot\mathrm{Sy}}} = \frac{73}{\sqrt{26\cdot 210}} = \frac{73}{73,89} = 0,988$$

$$b = \frac{S_{\mathrm{xy}}}{\mathrm{Sx}} = \frac{73}{26} = 2,81$$

$$a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 20 - 2,81\cdot 4 = 8,77$$

▲ Na strani Statističnega urada Slovenije (`http://www.stat.si/`) lahko preverimo, kako pogosto je posamezno ime. Tako je nastala spodnja tabela, ki prikazuje, koliko ljudi se je v določenih obdobjih rodilo z imenom Štefan in koliko ljudi se je v istih obdobjih rodilo z imenom Jože. Izračunaj korelacijski koeficient r in zapiši enačbo regresijske premice, ki najbolje opisuje zvezo med številom Štefanov in številom Jožetov.

obdobje	število Štefanov	število Jožetov
1921 - 1940	1863	2395
1941 - 1960	3207	7214
1961 - 1970	961	4186
1971 -1980	503	2045
1981 - 1990	203	972
1991 - 2004	117	263

▷ domača naloga

14.9 Kompleksna števila

Matematični priročnik, str. 22-25

Kompleksna števila so sestavljena iz realnega dela in imaginarnega dela.

$z = x + \mathrm{i} \cdot y$

Oznako i obravnavamo kot število, za katero velja $\mathrm{i}^2 = -1$ oz. $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Kompleksna števila predstavimo v ravnini, v kateri na osi x nanašamo realni del, v osi y pa imaginarni del.

Kompleksni števili $z_1 = a + \mathrm{i} \cdot b$ in $z_2 = a - \mathrm{i} \cdot b$ imenujemo med seboj konjugirani kompleksni števili, kar označimo takole:

$z_1 = \overline{z_2}$

$z_2 = \overline{z_1}$

Če je $z = a + \mathrm{i} \cdot b$, potem absolutna vrednost kompleksnega števila z zapišemo kot $|z|$ in jo izračunamo kot $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Absolutna vrednost kompleksnega števila je realno število.

Osnovne računske operacije z kompleksnimi števili

Računanje s kompleksnimi števili je podobno računanju z binomi.

1. Seštevanje in odštevanje

   $z_1 = a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1$

   $z_2 = a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2$

   $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i} \cdot (b_1 \pm b_2)$

2. Množenje

   $z_1 = a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1$

   $z_2 = a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2$

   $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2) = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + \mathrm{i} \cdot (a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2)$

3. Deljenje z realnim številom

   $z_1 = a + \mathrm{i} \cdot b$

   $\frac{z}{c} = \frac{a}{c} + \mathrm{i} \cdot \frac{b}{c}$

4. Deljenje kompleksnih števil

   Pri deljenju kompleksnih števil je postopek takšen, da najprej pomnožimo števec in imenovalec ulomka z konjugiranim imenovalcem.

   $$\frac{a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1}{a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2} = \frac{(a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1) \cdot (a_2 - \mathrm{i} \cdot b_2)}{(a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2) \cdot (a_2 - \mathrm{i} \cdot b_2)} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + \mathrm{i} \cdot (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Naloge:

▲ $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$

$z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$

Izračunaj $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ in $\frac{z_2}{z_1}$.

▷ glej zapiske predavanj.

▲ $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$

Izračunaj z^{-1}.

▷ glej zapiske predavanj.

Polarni zapis kompleksnih števil

Polarni zapis kompleksnih števil imenujemo tudi trigonometrični zapis. Pri polarnem zapisu kompleksno število ne obravnavamo kot točko ampak kot daljico v koordinatnem sistemu. Daljica ima dolžino in kot in s tema dvema številoma lahko enolično opišemo vsako kompleksno število.

Dolžino daljice označimo kot r in jo imenujemo modul kompleksnega števila.

Kot daljice označimo kot φ in ga imenujemo argument kompleksnega števila.

Pretvorbo v polarni zapis si oglejmo na primeru:

▲ $z = 3 + 2\mathrm{i}$

Dolžina daljice je enaka absolutni vrednosti kompleksnega števila.

$r = |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Kot izračunamo po naslednji formuli:

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\text{imaginarni del}}{\text{realni del}}$

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 33,69^\circ = 0,588$ radianov

Torej: $z = 3 + 2\mathrm{i} = (\sqrt{13}, 33,69^\circ) = (\sqrt{13}, 0,588)$

Tudi pretvorba iz polarnega zapisa si oglejmo na primeru:0

▲ $z = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

$z = r \cdot \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi$

$z = \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \mathrm{i}$

Pri zapisu s parom števil osnovne operacije ne delujejo na enostaven način! Tukaj je primer, kako moramo in kako ne smemo računati.

▲ $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$

$z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$

Po pretvorbi dobimo:

$z_1 = (\sqrt{5}, \operatorname{arctg} 2)$

$z_2 = (5, \operatorname{arctg}(-\frac{4}{3}))$

Preizkusimo seštevanje po komponentah:

$(\sqrt{5} + 5, \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}(-\frac{4}{3})) = 7,12 + 1,295\mathrm{i}$

Vidimo lahko, da nismo dobili prave vsote.

Računanje s polarnim zapisom poenostavimo, če za zapis uporabimo kar formulo iz pretvorbe, torej kompleksno število $z = a + \cdot b$ zapišemo kot $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$, kjer sta r in φ modul in argument kompleksnega števila z.

Nekaj razlogov, zakaj nam polarni zapis kompleksnega števila koristi:

1. Iz njega sta razvidna r in φ.
2. S pomočjo Moivrove formule hitro izračunamo potenco kompleksnega števila.

   $[r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)]^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin n\varphi)]$

   Moivrova formula velja le za celoštevilske potence, torej za $n \in \mathbb{Z}$.

Naloga:

▲ $z = 1 + 2\mathrm{i}$

Izračunaj z^3.

▷ glej zapiske predavanj.

Operacije nad kompleksnimi števili v polarni obliki

Glej zapiske predavanj.

Uporaba kompleksnih števil v analizi

Če upoštevamo kompleksna števila, potem ima vsak polinom n-te stopnje (koeficienti polinoma so realna števila) natanko n ničel.

Naloge:

▲ $f(x) = x^2 + 2x + 2$

▷ glej zapiske predavanj

▲ $f(x) = x^2 + 1$

▷ glej zapiske predavanj

Pravilo: Kompleksne ničle se vedno pojavijo v parih tako, da če je z ničla polinoma, potem je tudi konjugirano število $\bar{z}$ ničla tega polinoma. Iz tega pravila sledi, da imajo polinomi z lihimi stopnjami vsaj eno realno ničlo. To isto lahko dokažemo tudi na druge načine, npr. z Bolzanovim izrekom.

POGLAVJE 15

ZBIRKA NALOG

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^3 - x}{4x^2 - 5}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^3 - 3}{x^2 - 2}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^3+3}{x^2}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^3-x}{x^2-2}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Dana je racionalna funkcija $y = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-4}$.

a) Določi ničle in pole funkcije.

b) Določi asimptoto funkcije.

c) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

Izračunaj prvi in drugi odvod funkcije $y = \ln(x^3+2)$.

Izračunaj prvi in drugi odvod funkcije $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Izračunaj prvi in drugi odvod funkcije $y = \ln(\dfrac{1}{x})$.

Dana je funkcija $y = x^3 + 2x^2 - 3$.

a) Določi ničle in ekstreme funkcije.

b) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

c) V skrajno desni ničli izračunaj kot, pod katerim funkcija seka os x.

Dana je funkcija $y = x^3 - 2x^2 - 3x$.

a) Določi ničle in ekstreme funkcije.

b) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

c) V skrajno levi ničli izračunaj kot, pod katerim funkcija seka os x.

Dana je funkcija $y = 3x^3 - 2x^2 - x$.

a) Določi ničle in ekstreme funkcije.

b) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

c) V skrajno desni ničli izračunaj kot, pod katerim funkcija seka os x.

Dana je funkcija $y = x^3 - x^2 - 2x$.

a) Določi ničle in ekstreme funkcije.

b) Čimbolj natančno skiciraj potek funkcije.

c) V skrajno levi ničli izračunaj kot, pod katerim funkcija seka os x.

Racionalna funkcija $y = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ ima ničli v točkah $-\sqrt{2}$ in $+\sqrt{2}$.

Izračunaj kota, pod katerima funkcija v teh dveh ničlah seka os x.

Obseg pravokotnika s stranicama a in b je 24 cm. Določi stranici tako, da bo ploščina pravokotnika največja! Namig: ploščino izrazi kot kvadratno funkcijo ene stranice in potem izračunaj, kje je njen maksimum. — *8 točk*

Obseg pravokotnika je 20 cm. Kolikšni naj bosta stranici A in B tega pravokotnika, da bo diagonala najkrajša možna? Namig: diagonala pravokotnika s stranicama A in B se izračuna po formuli $d = \sqrt{A^2 + B^2}$. — *8 točk*

Izračunaj integral $\int \sqrt{1 - 3x}\, dx$. Namig: uporabi metodo substitucije! — *8 točk*

Izračunaj integral $\int \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx$.

Namig: najprej uporabi metodo substitucije tako, da zapišeš $x^2 + 2x + 2 = t$ in nato izraziš produkt $(x + 1)dx$. — *8 točk*

Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata funkciji $y = x^2$ in $y = 2x + 3$. Namig: ploščina je med 10 in 20.

Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata funkciji $y = x^4$ in $y = x^2 + 1$. Namig: presečišči sta v $x_1 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{20}}}{2} \approx -1,272$ in $x_2 = +\frac{\sqrt{2+\sqrt{20}}}{2} \approx +1,272$.

Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata funkciji $y = x^2$ in $y = cos(x)$, če kotne funkcije računamo v radianih! Namig: funkciji se sekata v točkah -0,82413 in +0,82413!

Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata funkciji $y_1 = x^4$ in $y_2 = 2x^2 - 1$.

Namig: funkciji se dotikata v točkah -1 in +1, sicer pa je vrednost funkcije y_1 v vseh točkah večja od vrednosti funkcije y_2.

Izračunaj posplošeni integral $\int\limits_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \mathrm{dx}$

Z navadno iteracijsko metodo za numerično iskanje ničel poišči ničlo funkcije $y = x - \sqrt{x+1}$. Namig: ničla leži v okolici točke 1,5.

Z Newtonovo tangentno metodo za numerično iskanje ničel poišči tisto ničlo funkcije $y = \ln(x^2 - 1)$, ki leži v okolici točke $x = +1.5$.

Z Newtonovo tangentno metodo za numerično iskanje ničel poišči tisto ničlo funkcije $y = x - ln(x^2)$, ki je v bližini točke $x = -1$.

Z Newtonovo tangentno metodo za numerično iskanje ničel poišči tisto ničlo funkcije $y = x^3 - x - 7$, ki leži v okolici točke $x = 2$.

Podan je določen integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$. Razdeli interval na štiri dele in s pomočjo Simpsonove formule numerično izračunaj vrednost tega integrala.

Podan je določen integral $\displaystyle\int_2^6 \frac{x^2+1}{x-1}\, dx$. Razdeli interval na štiri dele in s pomočjo Simpsonove formule numerično izračunaj vrednost tega integrala.

Podan je določen integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{-3}{x^2-4x-5}\,dx$.

a) Izračunaj natančno vrednost tega integrala. Namig: uporabi metodo nedoločenih koeficientov.

b) Interval razdeli na štiri dele in s pomočjo Simpsonove formule numerično izračunaj vrednost tega integrala.

Podan je določen integral $\displaystyle\int_6^8 \frac{x}{x^2-6x+8}\,dx$.

a) Izračunaj natančno vrednost tega integrala. Namig: uporabi metodo nedoločenih koeficientov.

b) Interval razdeli na štiri dele in s pomočjo Simpsonove formule numerično izračunaj vrednost tega integrala.

Dana je matrika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Izračunaj determinanto matrike $\mathbf{A}$.

b) Izračunaj inverzno matriko $\mathbf{A}^{-1}$.

Dana je matrika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Izračunaj determinanto matrike $\mathbf{A}$.

b) Izračunaj inverzno matriko $\mathbf{A}^{-1}$.

Reši matrično enačbo $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{X} + \mathbf{E} = \mathbf{A}$, če je matrika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Reši podani sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 3 \\ x+2y+3z &= 6 \\ 2x+2y+3z &= 7 \end{aligned}$$

Reši podani sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= -2 \\ x+3y+3z &= -2 \\ 3x+2y+3z &= 0 \end{aligned}$$

Reši podani sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} 2x+y &= 1 \\ 3x+2y+3z &= 1 \\ y+2z &= 1 \end{aligned}$$

Reši podani sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} 2x-4y &= 2 \\ 5x+3y+5z &= 18 \\ 4y-2z &= 4 \end{aligned}$$

Reši podani sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} y+z &= 3 \\ x+2y+3z &= 10 \\ 2x+3y &= 12 \end{aligned}$$

Na območju upravne enote Maribor je dne, 30. 6. 2002, živelo 180765 prebivalcev. Njihova starost je prikazana v tabeli (vir: `http://www.zzv-mb.si/`). V vsakem razredu, razen v zadnjem, poiščite srednjo vrednost. Srednja vrednost v zadnjem razredu naj bo 75 let. Nato izračunajte povprečje, standardni odklon ter modalno vrednost danih podatkov in narišite histogram.

število let	prebivalcev
0-1	1362
1-3	4114
4-6	4514
7-14	13618
15-19	10804
20-44	66874
45-64	51066
65 in več	28413

Dodatno: mediana je tista starost, ki bi jo imel človek na sredini vrste, če bi bili prebivalci v njej urejeni od najmlajšega do največjega. Ker so podatki grupirani v razrede, lahko vrednost mediane le približno ocenimo. Ocenite vrednost mediane ob predpostavki, da je starost prebivalcev znotraj vseh razredov, razen zadnjega, enakomerno porazdeljena.

V Statističnem letopisu Ljubljane najdemo podatke o najvišji letni temperaturi v Ljubljani od leta 1983 do 2002. Izračunaj povprečje in mediano podanih meritev. Nato podatke razvrsti v 5 razredov (glede na temperaturo!) in nariši histogram.

leto	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
temperatura	37,1	33,3	33,1	32,7	33,2	34,9	32,0	33,4	34,2	36,5

leto	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
temperatura	34,9	37,4	33,5	33,3	30,8	34,1	33,1	35,6	35,2	34,9

Desetiški števili $+99$ in -99 zapiši kot en zlog v dvojiškem in šestnajstiškem sistemu. Za predstavitev negativnih števil uporabi dvojiški komplement. — *8 točk*

Minimiziraj preklopno funkcijo $F = (A|B)|(B + C)$.

POGLAVJE 16

VPRAŠANJA

Vprašanja iz rednega dela

1. Množice. Kako zapišemo množico? Kaj spada v množico naravnih števil, množico celih števil, množico racionalnih števil in množico realnih števil? Kaj je to podmnožica? Kaj je to kartezični produkt množic?

2. Potenčna funkcija. Kako jo zapišemo s formulo? Kako poteka njen graf?

3. Eksponentna funkcija. Kako jo zapišemo s formulo? Kako poteka njen graf?

4. Logaritemska funkcija. Kako jo zapišemo s formulo? Kako poteka njen graf?

5. Kotni funkciji sinus in kosinus. Kakšne so njune značilnosti? Kako potekata njuna grafa? Razloži tudi, kako pretvorimo stopinje v radiane in obratno?

6. Linearna in kvadratna funkcija. Kako ju zapišemo s formulo? Kako potekata njuna grafa? Razloži, kdaj in kako uporabljamo Vietovo pravilo. Podaj primer.

7. Polinom. Podaj primer polinoma. Kako narišemo graf polinoma? Razloži, kdaj in kako uporabljamo Hornerjev algoritem. Podaj primer.

8. Racionalna funkcija. Podaj primer racionalne funkcije. Kako narišemo njen graf?

9. Odvod. Razloži pravila za odvajanje vsote, produkta in kvocienta funkcij. Podaj odvode elementarnih funkcij.

10. Odvod. Kako odvod uporabimo za iskanje minimumov in maksimumov dane funkcije? Razloži pojme prevoj, konkavnost in konveksnost funkcije. Kako odvod uporabimo za računanje kota, pod katerim funkcija seka os x?

11. Nedoločeni integral. Razloži pravila za integriranje in podaj integrale elementarnih funkcij. Razloži, kako poteka integriranje z metodo substitucije. Podaj primer.

12. Nedoločeni integral. Razloži, kako z metodo razstavljanja na parcialne ulomke izra”cunamo integral racionalne funkcije. Podaj primer.

13. Določeni integral. Razloži geometrijski pomen določenega integrala. Kako izračunamo določeni integral. Podaj primer.

14. Limita. Podaj primer izračuna limite in ga razloži. Kdaj in kako uporabimo L'Hospitalovo pravilo?

15. Taylorjeva in Fourierjeva vrsta. Kakšna je zveza med dano funkcijo in njeno Taylorjevo vrsto v neki točki. Podaj primer Taylorjeve vrste in razloži, kako jo izračunamo. Opiši, kaj predstavlja Fourierjeva vrsta.

16. Numerična matematika. Razloži metodo iskanja ničel z navadno iteracijsko metodo.

17. Numerična matematika. Razloži metodo iskanja ničel z Newtonovo tangentno metodo.

18. Numerična matematika. Razloži trapezno metodo in Simpsonovo formulo za numerično integracijo.

19. Matrike. Podaj primer matrik različnih velikosti. Razloži transponiranje, seštevanje in množenje matrik? Kako izračunamo determinanto matrike?

20. Matrike. Kako izračunamo adjungirano matriko? Kako izračunamo inverzno matriko?

21. Matrike. Kako rešujemo matrične enačbe? Podaj primer in razloži postopek reševanja.

22. Sistem linearnih enačb. Podaj primer in razloži postopek reševanja.

23. Statistika. Kako podatke razdelimo v razrede? Razloži pojme frekvenca, relativna frekvenca, frekvenčni poligon in histogram. Razloži pojme srednja vrednost (povprečje), disperzija (varianca), standardni odklon in mediana.

24. Statistika. Podaj značilnosti enakomerne porazdelitve in značilnosti normalne porazdelitve.

25. Statistika. Kako s testom hi-kvadrat preizkusimo, ali rezultati poskusa statistično pomembno odstopajo od pričakovanih izidov?

26. Statistika. Kako naredimo test neodvisnosti dveh veličin in čemu je namenjen?

27. Matematične neenačbe. Kako jih rešujemo? Razložite tudi, kako rešimo sistem matematičnih neenačb z dvema neznankama.

28. Linearna optimizacija. Razložite, kako poteka reševanje problema linearne optimizacije z metodo simpleksov. Opišite nekaj primerov problemov s področja optimizacije.

29. Številski sistemi. Kako pretvorimo število v dvojiški in kako v šestnajstiški sistem? Kako pretvorimo število iz dvojiškega in šestnajstiškega sistema v desetiški sistem? Razloži, kako izračunamo in zakaj uporabljamo dvojiški komplement.

30. Preklopne funkcije. Razloži operacije konjunkcija, disjunkcija in negacija. Naštej nekaj drugih operacij nad preklopnimi funkcijami in podaj njihove pravilnostne tabele. Razloži, kako minimiziramo preklopne funkcije.

Vprašanja iz dodatne snovi

1. Kotne funkcije. Podaj vrednosti osnovnih kotnih funkcij za nekatere kote med 0 in 90 stopinj. Kako prevedemo kotno funkcijo poljubnega kota na kotno funkcijo ostrega kota?

2. Kotne funkcije. Opiši, kako narišemo graf kotne funkcije. Podaj primer.

3. Krožne funkcije. Razloži krožni funkciji arcsin in arccos. Podaj odvode krožnih funkcij.

4. Nedoločeni integral. Razloži metodo integriranja po delih. Podaj primer.

5. Diferencialne enačbe. Podaj primer diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama in razloži postopek reševanja.

6. Implicitno in parametrično podane funkcije. Podaj primere in razloži, kako tako podane funkcije odvajamo.

7. Funkcija dveh neodvisnih spremenljivk. Kako označimo in kako izračunamo parcialni odvod? Podaj primer.

8. Linearna regresija. Razloži pojma korelacijski koeficient in regresijska premica. Kako jo izračunamo?

9. Kompleksna števila. Kako tvorimo konjugirano kompleksno število? Kako izračunamo absolutno vrednost kompleksnega števila? Razloži postopek seštevanja, množenja in deljenja kompleksnih števil.

10. Kompleksna števila. Razloži, kako zapišemo dano kompleksno število v polarnem zapisu. Podaj in razloži Moivrovo formulo za računanje potenc in korenov kompleksnega števila.